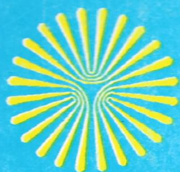


دانشگاه پیام نور

مبانی ریاضیات

مؤلف: جمس بت داود

از سری انتشارات آزمایشی متون درسی



مبانی ریاضیات

مؤلف: دکتر جمس بت داود

پیشگفتار

این کتاب بر اساس سرفصل پیشنهادی از طرف شورایعالی برنامه ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی برای درس مبانی ریاضیات تالیف شده است • کتاب شامل هشت فصل بوده که با فصل - • - شروع می شود • فصل -•- مقدمه مختصری بر مجموعه هاست که شامل تعاریف مقدماتی می باشد • در فصل ۱ زبانی را که در ریاضیات بکار برده می شود , معرفی کرده و برخی از روشهای متداول استدلال در ریاضیات را بیان و بررسی می کنیم • در فصل ۲ روابط را بطور کلی تعریف کرده و برخی از خواص و اعمال روی آنها را بررسی می کنیم • فصل های ۳ و ٤ به تعریف و بررسی خواص روابط خاصی اختصاص دارند • در فصل ۳ مبحث تابع و خواص اساسی آن بیان می شود و فصل ٤ شامل تعریف و بررسی خواص روابط هم ارزی و روابط ترتیبی است • اعداد اصلی و اعمال روی آنها را در فصل ۵ معرفی کرده و همچنین اصل انتخاب و برخی از معادل های آن را در این فصل بیان می کنیم • فصل ٦ مقدمه مختصری بر جبر است و در این فصل یك ساختمان جبری را بطور کلی در نظر می گیریم و بعضی از خواص آنرا مورد مطالعه قرار می دهیم • همچنین در فصل ٦ برخی از ساختمانهای جبری خاص را که از اهمیت زیادی برخوردارند معرفی می کنیم • فصل ٦ را با ارائه بعضی از روشهای مقایسه ساختمانهای جبری خاتمه می دهیم • فصل ۷ به ساختن دستگاه اعداد اختصاص دارد در این فصل با فرض داشتن مجموعه اعداد طبیعی سایر دستگاههای اعداد را می سازیم •

در این کتاب تمرینات متعددی گنجانده شده است که برخی از آنها نتیجه مستقیم تعاریف بوده و حل بعضی احتیاج به ممارست بیشتری دارد • در ضمن یادآوری شود که حل همه تمرینات ضروری است , زیرا که برخی از آنها در نتایج بعدی مورد استفاده قرار گرفته شده اند • کلیه تعاریف , قضایا , مثالها و نتایج این کتاب توسط

سه رقم مشخص شده اند که رقم سمت چپ نماینده فصل , رقم وسط نماینده قسمت و رقم سمت راست شماره آن در هر قسمت است • همچنین در هر قسمت تذکراتی آورده شده است که منظور از ذکر آنها شرح و بیان بعضی از قضایا, نتایج و تعاریف می باشد• در کتاب برای نمایش مجموعه های مختلف اعداد بصورت زیر از نماد هایی استفاده شده است:

IN نمایشگر مجموعه اعداد طبیعی , Z نمایشگر مجموعه اعداد صحیح , Q نمایشگر مجموعه اعداد گویا و بالاخره IR نمایشگر مجموعه اعداد حقیقی می باشند •

برای مطالعه این کتاب آشنایی مختصری با مثلثات و مجموعه های مختلف اعداد که در ریاضیات دوره دبیرستان تدریس می شوند , مفید است•

متذکر می شود که کتاب حاضر بر مبنای جزوه ای که توسط اینجانب و دکتر ژان بت داود تهیه شده و در چند سال اخیر توسط اینجانب در دانشگاه شهید بهشتی تدریس می شده , تألیف گردیده است •

در خاتمه لازم به تذکر است که کلیه مفاهیم بیان شده در این کتاب در اغلب دروس ریاضی مورد استفاده قرار می گیرند • بنابراین ضروری است که در بکار بردن این مفاهیم مهارت کافی کسب شود •

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

فصل ۰

مجموعه هاواعمال پول

در این فصل بطور مختصرمطالب ابتدائی درموردمجموعه هاواعمال روی آنهابیان می شود که درفصول بعدی مورد استفاده قرارمی گیرند ۰

۱.۰ مجموعه

یك مجموعه واحدی است متشکل ازاشیاء معین ومتمایز ۰اشیاءیك مجموعه را عناصریااعضاءآن مجموعه می نامیم ۰اگر A یك مجموعه و a عنصری از A باشد ، آنگاه می نویسیم $a \in A$ ۰ اگر a عنصری از A نباشد , آنگاه می نویسیم $a \notin A$.
به عنوان یك مثال عناصر مجموعه همه اعداد اول کوچکتراز ۱۰ عبارتنداز ۲ , ۳ , ۵ و ۷ این مجموعه رابصورت {۷, ۵, ۳, ۲} نشان می دهیم وآنرا A می نامیم ۰
فرض کنیم B مجموعه همه جوابهای معادله $(x+۲)^{۸}(x-۳)(x-۵)(x-۷)=۰$ باشد ۰
ملاحظه می شود که عناصرمجموعه B دقیقاً همان چهارعدد ۲, ۳, ۵و۷ می باشند ۰
به همین دلیل دومجموعه A و B مساویند , یعنی $A=B$ ۰ بنابراین تساوی دومجموعه بستگی به نحوه تعریف آن دومجموعه ندارد وفقط بستگی به عناصرآن دومجموعه دارد ۰اگردومجموعه دقیقاًدارای عناصریکسان باشند , آنگاه باهم مساویند ۰مثلا اگر $A=\{x, y\}$ و $B=\{x, y\}$, آنگاه $A=B$ ۰مثال دیگری ازدومجموعه مساوی, مجموعه {۲} ومجموعه همه اعداد زوج واول است۰
اگر A و B مساوی نباشندمی نویسیم $A \neq B$ ۰ مجموعه {x} فقط دارای یك عنصر x است , مجموعه کوچکترازاین مجموعه , مجموعه تهی است۰ مجموعه تهی با نماد ϕ نشان داده می شودودارای هیچ عنصری نیست ۰ پس $\phi \notin \phi$ ولی $\phi \in \{\phi\}$ ودرنتیجه $\{\phi\} \neq \phi$ ۰ همچنین می توان مجموعه های

{{Φ}} و{{{Φ}}} وغیره را تشکیل داد که مجموعه های متفاوتی می باشند •

۱ • ۱ •• زیرمجموعه

مجموعه A زیرمجموعه , مجموعه B است اگرهمه عناصر A عناصر B نیز باشند • اگر A زیرمجموعه B باشد آنگاه می نویسیم : $A \subseteq B$

ملاحظه می شود که هرمجموعه زیرمجموعه خود ش است و بعلاوه اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه $A=B$ • اگر A زیرمجموعه B نباشد آنگاه می نویسیم :

$A \nsubseteq B$

اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ آنگاه می نویسیم : $A \subset B$

ومی گوئیم A زیرمجموعه اکید B است•

تذکر

توجه کنید که دو رابطه ∈ و ⊆ با هم متفاوتند •اگر A و B دو مجموعه باشند وبخواهیم درستی $A \in B$ را تحقیق کنیم, مجموعه A را بعنوان یک واحد درنظر می گیریم وسپس بررسی می کنیم که آیا این واحد عنصری از B هست یا نه • ولی اگر بخواهیم درستی $A \subseteq B$ را تحقیق کنیم, هریک ازعناصر A را در نظر می گیریم وسپس بررسی می کنیم که آیا این عنصر, عنصری از B هست یا نه •

۲ • ۱ •• مثال

الف) $\Phi \subseteq \Phi$ ولی $\Phi \notin \Phi$

ب) $\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}\}$ ولی $\{\Phi\} \nsubseteq \{\{\Phi\}\}$

تعیین یک مجموعه

یکی از روشهای تعیین یک مجموعه ، تعیین شرایط تعلق یک عنصر به آن مجموعه است. بدین معنی که یک عنصر به یک مجموعه متعلق است اگر در شرط تعلق داشتن به آن مجموعه صدق کند. مجموعه همه عناصر x بطوریکه x در شرط تعلق داشتن (که بوسیله نماد ـــ x ـــ نشان می دهیم) صدق کند را بصورت زیر نشان می دهیم :

$$\{x \mid \text{——} x \text{——}\}$$

۱۰۳ .. مثال

الف) اگر A یک مجموعه باشد آنگاه $\mathcal{P}(A)$ مجموعه همه زیر مجموعه های A که آنرا مجموعه توان A می نامیم بصورت زیر نوشته می شود :

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

ب) مجموعه تهی را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\Phi = \{x \mid x \neq x\}$$

ج) {x یک عدد زوج و اول است | x} = {2}

۱۰۴ .. تمرین

۱ـ کدام یک از عبارتهای زیر با قرار دادن " $\in$ " یا " $\subseteq$ " بجای "ـــ" تبدیل به یک عبارت درست می شود ؟

الف) $\{\Phi\} - \{\Phi \;,\; \{\Phi\}\}$

ب) $\{\Phi\} - \{\Phi \;, \{\{\Phi\}\}\}$

ج) $\{\{\Phi\}\} - \{\Phi, \{\Phi\}\}$

د) $\{\{\Phi\}\} - \{\Phi, \{\{\Phi\}\}\}$

هـ) $\{\{\Phi\}\} - \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$

(هـ) $\{\{\Phi\}\}-\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$

۲- نشان دهید که هیچ یك از دو مجموعه Φ ، $\{\Phi\}$ و $\{\{\Phi\}\}$ باهم مساوی نیستند •

۳- نشان دهید که اگر $A\subseteq B$ آنگاه $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$

٤- اگر y,x در عنصر مجموعه A باشند ، آنگاه نشان دهیدکه $\{\{x\},\{x,y\}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

۰۲ اعمال بول

در اینجا سه عمل تفاضل ، اجتماع و اشتراك روی مجموعه ها را معرفی می‌کنیم • اعمال اجتماع و اشتراك را ابتدا برای دو مجموعه تعریف می‌کنیم و سپس این تعاریف را در مورد هر عده از مجموعه ها تعمیم می‌دهیم •

۱ ۰ ۲ ۰ تفاضل دو مجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • تفاضل مجموعه A از مجموعه B که با نماد $A-B$ نمایش داده می‌شود عبارتست از مجموعه همه عناصر A که به B تعلق ندارند ، یعنی

$$A-B=\{x \mid x\notin B \ , \ x\in A\}$$

مثلاً اگر $A=\{۱,۲,۳,٤\}$ و $B=\{۵,۱,٦\}$ آنگاه $A-B=\{۲,۳,٤\}$ و همینطور اگر $A=\{x,y\}$ و $B=\{z\}$ آنگاه $A-B=\{x,y\}$ •

اگر A زیر مجموعه ای از مجموعه U باشد آنگاه مجموعه $U-A$ مکمل مجموعه A نسبت به مجموعه U نامیده شده و با نماد A' نمایش داده می‌شود• بنابراین $A'=\{x \mid x\notin A \ , \ x\in U\}$

مثلاً اگر $U=\{x,y\}$ و $A=\{x\}$ آنگاه $A'=\{y\}$ •

۵۰۲۰۲ اجتماع دو مجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • اجتماع مجموعه A با مجموعه B که با نماد $A \cup B$ نمایش داده می‌شود عبارتست از مجموعه همه عناصر A وهمه عناصر B، یعنی

$$A \cup B = \{x \mid \quad x \in B \quad \text{یا} \quad x \in A\}$$

مثلاً اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۲,۴\}$ آنگاه $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴\}$ و همینطور اگر A مجموعه همه اعداد زوج و B مجموعه همه اعداد فرد باشدآنگاه $A \cup B$ مجموعه همه اعداد طبیعی است•

۵۰۲۰۳ اشتراک دو مجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • اشتراک مجموعه A با مجموعه B که با نماد $A \cap B$ نمایش داده می‌شود عبارتست از مجموعه همه عناصری که هم به A وهم به B تعلق دارند، یعنی

$$A \cap B = \{x \mid x \in B \quad , \quad x \in A\}$$

مثلاً اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۲,۴\}$ آنگاه $A \cap B = \{۲\}$ و همینطور اگر A مجموعه همه اعداد زوج و B مجموعه همه اعداد فردباشد آنگاه $A \cap B = \phi$

۵۰۲۰۴ تمرین

فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند • نشان دهیدکه :

(الف) $A \cup A = A$ و $A \cap A = A$

(ب) $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$

(ج) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \quad , \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (د

$(A-B)-C \subseteq A-(B-C) \quad , \quad A-B=A-(A\cap B)$ (هـ

$\mathcal{P}(A\cap B)\subseteq \mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B) \quad , \quad \mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$ (و

$\mathcal{P}(A-B)\subseteq\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ (ز

تعاریف اجتماع و اشتراك مجموعه هارا بصورت زیر تعمیم می دهیم :

۰۰۲۰۵ تعریف

فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد ، یعنی همه عناصر $\mathcal{A}$ مجموعه باشند ۰ اجتماع $\mathcal{A}$ و اشتراك $\mathcal{A}$ که بترتیب با نمادهای $\cup\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}$ نمایش داده می‌شوند ، دو مجموعه هستند که بصورت زیر تعریف می‌شوند :

$\cup\mathcal{A}=$ { x | x حداقل به یك مجموعه از عناصر $\mathcal{A}$ تعلق دارد }

$\cap\mathcal{A}=$ { x | x به هریك از عناصر $\mathcal{A}$ تعلق دارد }

مجموعه های $\cup\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}$ را بترتیب با نمادهای $\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X$ و $\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ نیز نمایش می‌دهیم ۰

اگر A و B دو مجموعه باشند و $\mathcal{A}=\{A , B\}$ آنگاه $\cup\mathcal{A}= A\cup B$ و $\cap\mathcal{A} = A\cap B$

۰۰۲۰۶ مثال

مجموعه $\mathcal{A}=\{\{۱ ,۲ , \phi\} \ , \{۳ ,۲ , \phi\} \ , \{۵ , \{۵\} \ , ۲ \ , \phi\}\}$ را

درنظر می گیریم ۰ دراین صورت داریم : $\cup\mathcal{A} = \{۱ ,۲ , \phi ,۳ ,۵ , \{۵\}\}$

$\cap\mathcal{A} = \{ ۲ , \phi\}$

۰۰۲۰۷ تمرین

۱ - مجموعه $\mathcal{A} =\{\{۱,۲ , \{۱,۲\}\} \ , \{۱,۳, \{۱,۳\}\} , \{۱, \phi , \{۱,\phi\}\}$

را در نظر بگیرید • مجموعه های $\cup\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}$ را بدست آورید •

۲ - مجموعه $\mathcal{A}=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}\}$

را در نظر بگیرید • نشان دهید که :

(الف) اگر $X\in\mathcal{A}$ آنگاه $X\subseteq\mathcal{A}$ •

(ب) $\cup\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}=\Phi$ •

۸ • ۲ • ۵ مثال

مجموعه $\mathcal{A}=\{\{1\},\{1,2\},\ldots,\{1,2,\ldots,n\},\ldots\}$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت $\cup\mathcal{A}=\mathbb{N}$ و $\cap\mathcal{A}=\{1\}$ • زیرا که فرض کنیم $x\in\cup\mathcal{A}$ • در اینصورت عنصر X در $\mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه $x\in X$ • چون $X\in\mathcal{A}$ پس $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $X=\{1,2,\ldots,n\}$ • چون $X\subseteq\mathbb{N}$ و $x\in X$ پس $x\in\mathbb{N}$ • برعکس فرض کنیم $x\in\mathbb{N}$ • در اینصورت $x\in\{1,\ldots,x\}$ و چون $\{1,\ldots,x\}\in\mathcal{A}$ پس $x\in\cup\mathcal{A}$ • بنابراین $\cup\mathcal{A}=\mathbb{N}$ •

برای اثبات تساوی $\cap\mathcal{A}=\{1\}$ فرض کنیم $x\in\cap\mathcal{A}$ • در اینصورت برای هر $X\in\mathcal{A}$ داریم $x\in X$ • چون $\{1\}\in\mathcal{A}$ پس $x\in\{1\}$ • از طرف دیگر چون $1\in\{1,\ldots,n\}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ پس $1\in X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ و در نتیجه $1\in\cap\mathcal{A}$ • بنابراین $\cap\mathcal{A}=\{1\}$ •

۹ • ۲ • ۵ مثال

فرض کنیم z یک عدد حقیقی مثبت باشد • در اینصورت می دانیم که فاصله باز $(o\,,\,z)$ مجموعه ای است که بصورت $(o,z)=\{x\mid 0<x<z\ ,\ x\in\mathbb{R}\}$ تعریف می‌شود • حال مجموعه $A=\{(o,z)\mid z>o\ ,\ z\in\mathbb{R}\}$

را در نظر می‌گیریم که در اینصورت $\cup\mathcal{A} = (0, +\infty)$ و $\cap\mathcal{A} = \Phi$. برای اثبات تساوی اول فرض کنیم $x \in \cup\mathcal{A}$. در اینصورت $X \in \mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه $x \in X$ پس عدد حقیقی و مثبت z وجود دارد بطوریکه $X = (0, z)$ و در نتیجه $x \in (0, z)$ چون $(0, z) \subseteq (0, +\infty)$ پس $x \in (0, +\infty)$. حال فرض کنیم $x \in (0, +\infty)$. در اینصورت $x > 0$ و با در نظر گرفتن عددی حقیقی بزرگتر از x مثلاً $x+1$ خواهیم داشت $x \in (0, x+1)$. چون $(0, x+1) \in \mathcal{A}$ پس $x \in \cup\mathcal{A}$. بنابراین $= (0, +\infty)$.

برای اثبات تساوی $\cap\mathcal{A} = \Phi$ فرض کنیم $\cap\mathcal{A} \neq \Phi$. در اینصورت عنصر x وجود دارد بطوریکه $x \in \cap\mathcal{A}$. پس برای هر $X \in \mathcal{A}$ داریم $x \in X$. چون $X \in \mathcal{A}$ پس عدد حقیقی و مثبت z وجود دارد بطوریکه $X = (0, z)$. بنابراین برای هر عدد حقیقی و مثبت z داریم $x \in (0, z)$. چون $x \in (0, z)$ پس x یک عدد حقیقی مثبت است و در نتیجه $x/2$ نیز یک عدد حقیقی مثبت است . بنابراین $x \in (0, x/2)$ که یک تناقض است زیرا که $x \not< x/2$. پس فرض $\cap\mathcal{A} \neq \Phi$ غلط است و در نتیجه $\cap\mathcal{A} = \Phi$.

۰.۲.۱۰ قضیه

فرض کنیم A یک مجموعه و $\mathcal{A}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد . در اینصورت :

(الف) $$A \cup \Big(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X\Big) = \bigcap_{X\in\mathcal{A}} (A \cup X)$$

(ب) $$A \cap \Big(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X\Big) = \bigcup_{X\in\mathcal{A}} (A \cap X)$$

اثبات

(الف) فرض کنیم $x \in A \cup (\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X)$. در اینصورت $x \in A$ یا $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$. پس $x \in A$ یا $x \in X$ برای هر $X \in \mathcal{A}$. بنابراین $x \in A \cup X$ برای هر $X \in \mathcal{A}$ و در نتیجه

$x\in\bigcap_{X\in\mathcal{A}}(A\cup X)$. حال فرض کنیم $x\in\bigcap_{X\in\mathcal{A}}(A\cup X)$. در اینصورت $x\in A\cup X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$. پس $x\in A$ یا $x\in X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$. پس $x\in A$ یا $x\in\bigcap_{X\in\mathcal{A}}X$ و در نتیجه $x\in A\cup(\bigcap_{X\in\mathcal{A}}X)$. بنابراین $\bigcap_{X\in\mathcal{A}}(A\cup X)=A\cup(\bigcap_{X\in\mathcal{A}}X)$.

۰۰۲۰۱۱ تمرین

تساوی (ب) در ۰۰۲۰۱۰ را اثبات کنید .

۰۰۲۰۱۲ تمرین

۱- فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد و $A\in\mathcal{A}$. نشان دهید که $A\subseteq\bigcup\mathcal{A}$ و $\bigcap\mathcal{A}\subseteq A$.

۲- فرض کنید A یك مجموعه و $\mathcal{A}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد . نشان دهید که :

(الف) اگر $X\subseteq A$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ آنگاه $\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X\subseteq A$

(ب) اگر $A\subseteq X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ آنگاه $A\subseteq\bigcap_{X\in\mathcal{A}}X$.

۳- فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد . نشان دهید که :

(الف) $\mathcal{P}(\bigcap_{X\in\mathcal{A}}X)=\bigcap_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)$

(ب) $\bigcup_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)\subseteq\mathcal{P}(\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X)$

فصل ۱

منطق

همانگونه که می‌دانید برای گفتن هر مطلبی در ریاضیات بطوریکه مورد قبول سایرین باشد احتیاج به اثبات آن مطلب است • بدین صورت که نتایج جدید توسط بکاربردن اثباتهای ریاضی و با استفاده از نتایج دانسته شده بدست می‌آیند • در این فصل ابتدا زبانی را که در ریاضیات بکار می‌بریم معرفی می کنیم و سپس برخی از روشهای استدلال را که معمولاً در ریاضیات بکار برده می شوند بیان می‌کنیم •

۱•۱ - گزاره

عبارتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

(۱) امروز شنبه است •

(۲) ۲ یك عدد اول است •

(۳) ۵ یك عدد زوج است •

(٤) دو هزار و پانصدمین رقم عدد π مساوی ۵ است •

ملاحظه می‌شود که درست بودن یا غلط بودن هر یك از عبارتهای فوق را می‌توان تعیین کرد • مثلاً بعد از بیان عبارت " امروز شنبه است " می‌توان دید که آیا امروز شنبه است یا نه • اگر امروز شنبه است آنگاه این عبارت یك عبارت درست است و اگر امروز شنبه نباشد آنگاه این عبارت یك عبارت غلط است • می دانیم که عدد ۲ یك عدد اول است و در نتیجه عبارت دوم یك عبارت درست است • همانطوری

که می‌دانیم عبارت سوم یک عبارت غلط است • برای عبارت چهارم شاید فوراً نشود تعیین کرد که این عبارت درست است یا غلط است ولی بهر حال می‌دانیم که این عبارت یا درست است یا غلط است •

حال عبارتهای زیر را در نظر می‌گیریم •

(۵) درسهایت را بخوان • یا بطور کلی هر جمله امری •

(۶) کی خواهی آمد ؟ یا بطور کلی هر جمله سئوالی •

ملاحظه می‌شود که برای عبارتهای اخیر نمی‌توان صفت درست بودن یا غلط بودن داد • این مطلب حتی در مورد جمله های اخباری نظیر " حسن خوش‌اخلاق است " یا " این پرتقال شیرین است " نیز صادق است • زیرا که خوش‌اخلاق بودن یا شیرین بودن بستگی به سلیقه شخص دارد و نمی توان در مورد درست بودن یا غلط بودن این نوع جمله ها مطمئن بود •

۱۰۱۰۱ - تعریف

گزاره عبارتی است که بتوان درست بودن یا غلط بودن آن را تعیین کرد • پس عبارتهای (۱) الی (٤) گزاره هستند و عبارتهای (۵) و (۶) گزاره نیستند •گزاره‌ها را با حروف p , q , r , s , t ... با اندیس یا بدون اندیس نمایش خواهیم داد •

۱۰۱۰۲ - ترکیب گزاره ها

عبارتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

(۱) ۲ یک عدد زوج و ۲ یک عدد اول است •

(۲) امروز شنبه است یا امروز یکشنبه است •

(۳) چون ۱۲ یک عدد زوج است پس ۱۲ برعدد ۲ قابل قسمت است •

ملاحظه می‌شود که عبارت (۱) از ترکیب دو عبارت " ۲ یک عدد زوج است" و " ۲ یک عدد اول است " با استفاده از حرف رابط " و " تشکیل شده است. عبارت (۲) از ترکیب دو عبارت " امروز شنبه است " و " امروز یکشنبه است " با استفاده از حرف رابط " یا " تشکیل شده است. عبارت (۳) از ترکیب دو عبارت " ۱۲ یک عدد زوج است " و " ۱۲ بر عدد ۲ قابل قسمت است " با استفاده از کلمات رابط " چون " و " پس " تشکیل شده است. بطور کلی در زبان فارسی از ترکیب عبارتهای بسیط با استفاده از حروف رابط مانند " و " ، " یا " و غیره عبارتهای مرکب می‌سازیم. مثلاً عبارت (۱) یک عبارت مرکب است که از ترکیب " عبارت بسیط " ۲ یک عدد زوج است " و " ۲ یک عدد اول است " با استفاده از حرف رابط " و " تشکیل شده است.

در ریاضیات نیز از همین روش استفاده می‌شود. و بدین صورت که از ترکیب گزاره های بسیط (یا ابتدائی) با استفاده از رابطهای گزاره ای ، گزاره های مرکب ساخته می‌شوند و درست بودن یا غلط بودن هر گزاره مرکب برحسب درست بودن یا غلط بودن گزاره های ابتدائی تشکیل دهند و نوع رابط گزاره ای تعیین می‌گردد. در زیر به معرفی هریک از رابطهای گزاره ای می‌پردازیم.

رابط گزاره ای " نه "

این رابط گزاره ای را با نماد $\neg$ نمایش می‌دهیم. البته نماد $\sim$ نیزبرای نمایش رابط گزاره ای " نه " بکاربرده می‌شود. ولی چون ما بعداً در این درس از نماد $\sim$ برای نمایش مفهوم دیگری استفاده خواهیم کرد لذا نماد $\neg$ را برای نمایش رابط گزاره ای " نه " بکار می بریم.

اگر p یک گزاره باشد ، آنگاه $\neg p$ نیز یک گزاره است. گزاره $\neg p$ نفی گزاره p است ، یعنی اگر p یک گزاره درست باشد ، آنگاه $\neg p$ یک گزاره غلط است و اگر p یک گزاره غلط باشد ، آنگاه $\neg p$ یک گزاره درست است. مثلاً اگر

p نمایش دهنده گزاره " ۲ یك عدد فرد است " باشد , آنگاه $\neg p$ نمایش دهنده گزاره " ۲ یك عدد فرد نیست " خواهد بود • بنابراین اگر درست بودن یك گزاره را با عدد ۱ و غلط بودن یك گزاره را با عدد 0 نشان دهیم , آنگاه جدول زیر را خواهیم داشت :

p	$\neg p$
۱	۰
۰	۱

در این جدول همانطوریکه ملاحظه میشود در سطر اول گزاره های p و $\neg p$ نوشته شده است • برای گزاره p دو حالت وجود دارد که یا درست است , یا غلط است • این مطلب زیر p در ستون مربوط به آن بترتیب با اعداد ۱ و 0 نشان داده شده است • گفتیم که وقتی p درست باشد آنگاه $\neg p$ غلط و وقتی که غلط باشد آنگاه $\neg p$ درست است • بنابراین زیر $\neg p$ در ستون مربوط به آن بترتیب اعداد 0 و ۱ قرار میگیرند • جدول فوق را جدول درستی وابسته به $\neg p$ می‌نامیم •

<u>رابطه گزاره ای "و"</u>

این رابطه گزاره ای را بانماد $\wedge$ نمایش میدهیم • اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه $p \wedge q$ نیز یك گزاره است • گزاره های p و q گزاره های ابتدائی گزاره مرکب $p \wedge q$ هستند • مثلاً اگر p نمایش دهنده گزاره " ۲ یك عدد زوج است" و q نمایش دهنده گزاره " ۲ یك عدد اول است " باشد , آنگاه $p \wedge q$ نمایش دهنده گزاره (۲ یك عدد زوج و یك عدد اول است " می باشد • گزاره $p \wedge q$ وقتی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند • در غیر اینصورت $p \wedge q$ غلط است • بعبارت دیگر جدول درستی وابسته به $p \wedge q$ بصورت زیر است :

p	q	p∧q
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

ملاحظه می‌شود برحسب اینکه p و q هردو درست ، هردو غلط یا یکی درست و یکی غلط باشد چهار حالت مختلف پیش می‌آید که در جدول فوق این چهار حالت در نظر گرفته شده است.

رابط گزاره ای "یا"

این رابط گزاره ای را با نماد ∨ نمایش می دهیم . اگر p و q دو گزاره باشند ، آنگاه p ∨ q نیز یک گزاره است . گزاره های p و q گزاره های ابتدایی گزاره مرکب p∨q هستند مثلا اگر p نمایش دهنده گزاره " آ یک عدد زوج است " و q نمایش دهنده گزاره " آ یک عدد فرد است " باشد آنگاه p ∨ q نمایشگر دهنده گزاره " آ یک عدد زوج یا یک عدد فرد است " می باشد . در زبان فارسی وقتی کلمه "یا" را بین دو عبارت قرار می دهیم ، عبارت مرکب حاصل را معمولا وقتی درست می دانیم که فقط یکی از دو عبارت تشکیل دهنده آن درست باشد . اما در ریاضیات چنین نیست و گزاره p ∨ q وقتی درست است که لااقل یکی از دو گزاره p و q درست باشد . درغیراینصورت غلط می باشد . پس اگر هردو گزاره p و q درست باشند ، آنگاه p ∨ q نیز درست است . جدول درستی وابسته به p∨q بصورت زیر است:

p	q	p∨q
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

<u>رابطه گزاره‌ای " نتیجه می‌دهد "</u>

این رابطه گزاره‌ای را با نماد $\Longrightarrow$ نمایش می‌دهیم . اگر p و q دو گزاره باشند , آنگاه $p \Longrightarrow q$ نیز یک گزاره است . گزاره های p و q گزاره های ابتدائی گزاره مرکب $p \Longrightarrow q$ هستند . مثلاً اگر p نمایش دهنده گزاره " ۱۲ بر ۶ قابل قسمت است " و q نمایش دهنده گزاره " ۱۲ بر ۳ قابل قسمت است " باشند , آنگاه $p \Longrightarrow q$ نمایش دهنده گزاره " ۱۲ بر ۶ قابل قسمت است نتیجه می‌دهد ۱۲ بر ۳ قابل قسمت است " می‌باشد . این گزاره رامی توان بصورت " اگر ۱۲ بر ۶ قابل قسمت باشد , آنگاه ۱۲ بر ۳ قابل قسمت است" یا بصورت " چون ۱۲ بر ۶ قابل قسمت است پس ۱۲ بر ۳ قابل قسمت است " نیز بیان کرد ومعنی هرسه جمله یکسان است . گزاره $p \Longrightarrow q$ وقتی غلط است که p درست و q غلط باشد . درغیر اینصورت $p \Longrightarrow q$ درست است . جدول درستی وابسته به $p \Longrightarrow q$ بصورت زیر است :

p	q	$p \Longrightarrow q$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۱

گزاره p را " فرض " وگزاره q را " نتیجه " گزاره $p \Longrightarrow q$ می‌نامیم .

<u>رابطه گزاره‌ای " اگر و فقط اگر "</u>

این رابطه گزاره‌ای را با نماد $\Longleftrightarrow$ نمایش می‌دهیم . اگر p و q

دو گزاره باشند آنگاه $p \Longleftrightarrow q$ نیز یك گزاره است • دو گزاره p و q گزاره‌های ابتدائی گزاره $p \Longleftrightarrow q$ هستند • مثلاً اگر p نمایش دهنده گزاره "۱۲ بر ۳ قابل قسمت است " و q نمایش دهنده گزاره " ۱۲ مضرب از ۳ است " باشند , آنگاه $p \Longleftrightarrow q$ نمایش دهنده گزاره " ۱۲ بر ۳ قابل قسمت است اگر و فقط اگر ۱۲ مضرب از ۳ باشد " خواهد بود • این گزاره را می‌توان بصورت " یك شرط لازم و کافی برای اینکه ۱۲ بر ۳ قابل قسمت باشد این است که ۱۲ مضرب از ۳ باشد " نیز بیان کرد و معنی هردو جمله یکسان است • گزاره $p \Longleftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q هردو درست یا هردو غلط باشند • در غیر اینصورت $p \Longleftrightarrow q$ غلط است • جدول درستی وابسته به $p \Longleftrightarrow q$ بصورت زیر است :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

تذکر

باتوجه به مطالب فوق می‌توان گزاره های پیچیده‌تری مانند $(p \vee q) \wedge r$ ، $(p \vee q) \wedge r \Longrightarrow s$ وغیره را ساخت و درست بودن یا غلط بودن آنها را با تشکیل جدول درستی وابسته به آنها , تعیین کرد •

۳-۱-۱ - مثال

جدول درستی وابسته به گزاره $(p \vee q) \wedge r$ را تشکیل می‌دهیم •

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۰	۰	۰

در این مثال ملاحظه می‌شود که گزاره $(p \vee q) \wedge r$ شامل سه گزاره ابتدائی p، q و r است و جدول وابسته به آن دارای $۸=۲^۳$ سطر می‌باشد. بطور کلی اگر یک گزاره مرکب شامل n گزاره ابتدائی باشد، آنگاه جدول درستی وابسته به آن دارای ۲^n سطر خواهد بود.

<u>۱۰۱۰٤ - تمرین</u>

جدول درستی وابسته به هریک از گزاره های زیر را تشکیل دهید :

۱- $(p \vee q) \wedge r \Longrightarrow s$

۲- $(\neg p \wedge q) \Longrightarrow r$

۳- $(p \vee \neg q) \Longleftrightarrow r$

٤- $(p \vee q) \Longrightarrow p$

۵- $\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p$

٦- $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$

<u>۱۰۱۰۵ - تعریف</u>

یک گزاره همیشه درست، گزاره ای است که مستقل از درست بودن یا غلط

بودن گزاره های ابتدایی تشکیل دهنده آن ، همیشه درست باشد •

برای تعیین اینکه یك گزاره همیشه درست است یا نه ، کافی است جدول درستی وابسته به آنرا تشکیل دهیم و اگر در ستون مربوط به این گزاره فقط عدد ۱ بود ، آنگاه یك گزاره همیشه درست است و در غیر اینصورت گزاره همیشه درست نیست • در ۱۰۱۰٤ گزاره های تمرینات ٤, ٥, ٦ گزاره های همیشه درست هستند • مثلاً جدول درستی وابسته به تمرین ٥ بصورت زیر است :

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$(\neg p) \Longleftrightarrow p$
۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱

ملاحظه میشودکه در ستون مربوط به گزاره $p \Longleftrightarrow (\neg p)\neg$ فقط عدد ۱ قرار دارد و درنتیجه یك گزاره همیشه درست است • گزاره همیشه درست $p \Longleftrightarrow (\neg p)\neg$ بیان کننده این است که دو گزاره p و $(\neg p)\neg$ معادل یا هم ارزشند •

۱۰۱۰٦ - تمرین

نشان دهید که گزاره های زیر، گزاره های همیشه درست هستند :

(الف) $\neg p \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

(ب) $(p \wedge (p \Longrightarrow g)) \Longrightarrow q$

(ج) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow (p \Longrightarrow q))$

۱۰۱۰۷ - تمرین

کدامیك از گزاره های زیر، گزاره های همیشه درست میباشند ؟

(الف) $p \Longrightarrow \neg p$

(ب) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\neg p \Longrightarrow \neg q)$

(ج) $(p \Longrightarrow \neg q) \Longrightarrow (\neg q \Longrightarrow p)$

(د) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow ((r \vee p) \Longrightarrow (r \vee q))$

<u>۱۰۱۰۸</u>

در زیر تعدادی از گزاره های همیشه درست مهم ذکر شده اند :

(۱) $((p \wedge q) \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

(۲) $((p \vee q) \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

(۳) $((p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow r))$

(٤) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$

(٥) $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$

(٦) $(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow p)$

(۷) $(p \wedge (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

(۸) $(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

(۹) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(۱۰) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(۱۱) $p \vee \neg q$

(۱۲) $\neg(p \wedge \neg p)$

(۱۳) $\neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(۱٤) $\neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$

(۱٥) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(۱٦) $((p \wedge q) \Longrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r))$

(۱۷) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \qquad (۱۸)$$

$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longrightarrow q) \qquad (۱۹)$$

$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \Longrightarrow \neg q) \qquad (۲۰)$$

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow q) \wedge (\neg p \Longrightarrow \neg q)) \qquad (۲۱)$$

$$((p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r) \qquad (۲۲)$$

۱۰۱۰۹ - مثال

در ۱۰۱۰۸ گزاره های (۹) و (۱۰) به قوانین دمورگان معروفند • در زیر جدول درستی گزاره (۹) در ۱۰۱۰۸ را تشکیل می‌دهیم :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱

ملاحظه می‌شودکه درستون مربوط به گزاره (۹) در ۱۰۱۰۸ فقط عدد ۱ قرار دارد و درنتیجه یک گزاره همیشه درست است •

۱۰۱۰۱۰ - تمرین

نشان دهیدکه گزاره (۱) الی (۸) در ۱۰۱۰۸، گزاره های همیشه درست هستند •

<u>۱۱-۱-۱- تمرین</u>

نشان دهید که گزاره های زیر همیشه درست هستند :

(۱) $\neg(\neg p \vee \neg q) \Longleftrightarrow (p \wedge q)$

(۲) $(\neg p \vee q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q)$

(۳) $\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)) \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$

<u>تذکر</u>

از ۱۱۰۱۰۱ نتیجه می‌شود که از دو رابط گزاره ای $\neg$ و $\vee$ می‌توان سایر رابطهای گزاره ای را بدست آورد • زیرا که گزاره (۱) نشان می‌دهد که $p \wedge q$ معادل $\neg(\neg p \vee \neg q)$ است • یعنی بجای $p \wedge q$ می‌توان $\neg(\neg p \vee \neg q)$ را در نظر گرفت • همچنین گزاره های (۲) و (۳) نشان می‌دهند که می‌توان بترتیب رابطهای گزاره ای $\Longrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$ را برحسب رابطهای گزاره ای $\neg$ و $\vee$ بیان کرد• بطریق مشابه می‌توان نشان داد که با داشتن دو رابط گزاره ای $\neg$ و $\wedge$ می‌شود سایر رابطهای گزاره ای را بدست آورد • بنابراین برای ساختن زبان گزاره ها داشتن دو رابط گزاره ای $\neg$ و $\vee$ یا $\neg$ و $\wedge$ کافی است•

<u>تذکر</u>

در مقابل گزاره های همیشه درست گزاره های همیشه غلط هستند • گزاره همیشه غلط گزاره ایست که مستقل از درست بودن یا غلط بودن گزاره های ابتدائی تشکیل دهنده آن همیشه غلط باشد • مثلاً گزاره $p \wedge \neg p$ یا گزاره $\neg p \Longleftrightarrow p$ چنین گزاره هایی می‌باشند • اگر جدول درستی وابسته به این گزاره هارا تشکیل دهیم ملاحظه خواهیم کرد که در ستون مربوط به این گزاره ها فقط عدد ۰ قرار می‌گیرد • یک گزاره همیشه غلط یک گزاره متناقض نیز نامیده می‌شود •

۱۰۲ – گزاره نما

عبارت زیر را در نظر می‌گیریم :

x یک عدد اول است ٠

اگر x را بعنوان حرف بیست و چهارم الفبای لاتین در نظر بگیریم ، آنگاه این عبارت غلط است و بعنوان یک گزاره تلقی می‌شود ٠ ولی اگر x را بعنوان یک متغیر در نظر بگیریم و فرض کنیم که در مجموعه IN تغییر می‌کند ، آنگاه نمی‌توان درست بودن یا غلط بودن این عبارت را تعیین کرد ٠ در این صورت این عبارت یک گزاره نیست ٠ حال اگر عنصری از IN بجای x قرار گیرد ، آنگاه عبارت بدست آمده یک گزاره است ٠ مثلاً اگر بجای x عدد ٤ را از IN جایگزین کنیم آنگاه گزاره غلط زیر بدست می‌آید :

٤ یک عدد اول است

حال عبارت زیر را که در آن x یک متغیر است و در Z تغییر می‌کند ، در نظر می‌گیریم ٠

$$x + ۳ = ۲$$

این عبارت یک گزاره نیست ولی با قرار دادن ٥ بجای x گزاره غلط زیر بدست می‌آید :

$$٥ + ۳ = ۲$$

همچنین با قرار دادن ۱- بجای x در عبارت x+۳=۲ گزاره درست زیر بدست می‌آید :

$$-۱ + ۳ = ۲$$

۱٠۲٠۱ – تعریف

گزاره نما عبارتی است که شامل یک یا چند متغیر است و این متغیرها در

مجموعه معینی تغییر می‌کنند و با قرار دادن عناصر از این مجموعه معین بجـای متغیرها یك گزاره بدست می‌آید •

مثلاً عبارتهای " x یك عدد اول است " که درآن x در $\mathbb{N}$ تغییر می‌کند و " $x+3=2$ " که درآن x در $\mathbb{Z}$ تغییر می‌کند گزاره نما هستند •

۱۰۲۰۲ - تمرین

عبارتهای زیر را در نظر بگیرید • توجه کنید مجموعه ای که متغیر x در آن تغییر می‌کند در مقابل هریك از عبارتها نوشته شده است •

۱- x بر عدد ۵ قابل قسمت است و x کوچکتر از عدد ۲۷ می‌باشد. $\mathbb{N}$

۲- $x>-2$. $\mathbb{Z}$

۳- x یك مثلث قائم الزاویه است. مجموعه مثلثهای واقع در صفحه

۴- x مجموعه اعداد اول کوچکتر از ۱۱ است. مجموعه همه زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ یعنی ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$) •

۵- x نویسنده کتاب بینوایان است. مجموعه انسانها •

حال با قرار دادن عناصر از مجموعه های مربوطه بجای x در هر یك از عبارتهای فوق ، یك گزاره درست و یك گزاره غلط بدست آورید •

نماد گـــذاری

یك گزاره نما با متغیر x که در مجموعه U تغییر می‌کند را با نماد p_x نمایش می‌دهیم • U را مجموعه جهانی وابسته به p_x و x را متغیر آزاد واقـــع در p_x می‌نامیم • اگر a عنصری از U باشد وآنرا بجای x در p_x قرار دهیـــم آنگاه گزاره حاصل را با نماد p_a نمایش می‌دهیم • همچنین می‌توان گفت که p_a از p_x بازاء $x=a$ بدست آمده است •

تذکـــر

گزاره نمای تمرین ۱ در ۱۰۲۰۲ را در نظر می‌گیریم و آنرا با p_x نمایـــش می‌دهیم • ملاحظه می‌شود که متغیر x در p_x دو بار تکرار شده است • بایـــــد توجه کرد که وقتی عنصری از مجموعه $\mathbb{N}$ بجای x در p_x قرار می‌گیرد، بایـــد آن عنصر همزمان بجای هر وقوع x در p_x قرار گیرد • مثلاً p_0 گزاره درست زیـــــر اســـت :

۱۵ بر عدد ۵ قابل قسمت است و ۱۵ کوچکتر از ۲۷ می‌باشد •

بطور کلی اگر در یك گزاره نمای p_x، متغیر آزاد x چندین بار تکرار شود، آنگـاه برای هر وقوع x در p_x یك عنصر از مجموعه جهانی وابسته به p_x جایگزیـــــن x می‌شـــود •

۱۰۲۰۳ - تمرین

عبارتهای زیر را در نظر بگیرید • در مقابل عبارتهایی که شامل متغیـــر هستند مجموعه ای که x درآن تغییر می‌کند، نوشته شده است •

۱ - عدد ۱ مساوی عدد ۲ است •

۲ - x بزرگتر از عدد ۲ است • $\mathbb{N}$

۳ - x بزرگتر از عدد ۲ و x کوچکتر از عدد ۵ است • $\mathbb{Z}$

٤ - برای هر x اگر x یك عدد زوج باشد، آنگاه x بر عدد ۲ قابل‌قسمت اســـت • $\mathbb{N}$

۵ - یك عدد x وجود دارد بطوری که x فرد است و x از ۳ بزرگتر است• $\mathbb{N}$

٦ - $x \in A$, A یك زیر مجموعه $\mathbb{R}$ است • $\mathbb{R}$

حال تعیین کنید کدامیك از عبارتهای فوق گزاره نما می‌باشد •

گزاره نماهای چند متغیره

یك گزاره نما ممکن است که شامل بیش از یك متغیر باشد • در زیر چند مثال از گزاره نماهایی که شامل دو متغیر هستند ارائه شده است• در مقابل هر عبارت مجموعه ای که متغیرهای x, y درآن تغییر می‌کنند نوشته شده است•

۱ - x بزرگتر از y است • $\mathbb{N}$

۲- $xy^2 + x^2y + 2x = 0$ • $\mathbb{R}$

۳- مثلث x با مثلث y متشابه است و مساحت x دو برابر مساحت y است • مجموعه مثلثهای واقع در صفحه

ملاحظه می‌شودکه اگر بجای x و y در عبارتهای ۱, ۲و۳ دو عنصر از مجموعه مربوط به هر عبارت قرار دهیم , آنگاه گزاره ای بدست می‌آید •

۱۰۲۰٤ - تعریف

فرض‌کنیم Pxy یك عبارت شامل دومتغیر xو yمی باشدومتغیرهای x وyدر مجموعه U تغییر می کنند •اگربا قراردادن هردوعنصرمتعلق به U بجای xوy در Pxy یك گزاره بدست آید آنگاه Pxyیك گزاره نمای دومتغیره است •مجموعه U رامجموعه جهانی وابسته به Pxy و xو y رامتغیرهای‌آزاد واقع در Pxyمی نامیم •اگر a و b دوعنصرازمجموعهه جهانیU باشند گزاره حاصل توسط قراردادن a و bبترتیب بجا ی xو y رابا P_{ab} نمایش‌می دهیم •
می‌توان گفت‌که گزاره P_{ab} ازP_{xy} بازاء$x=a$ و $y=b$بدست‌آمده است •

تذکر

بطریق مشابه می‌توان گزاره نماهای سه متغیره , گزاره نماهای چهارمتغیر وغیره را تعریف کرد •

۱۰۲۰۵ - تمرین

هریك از عبارتهای زیر را همراه مجموعه ای که مقابل آن نوشته شده است در نظر بگیرید ۰

۱ - $x^2 + y^2 = 0$ ۰ $\mathbb{R}$

۲ - x برادر y است ۰ مجموعه انسانها ۰

۳ - $x < y$ و $y < 10$ ۰ $\mathbb{N}$

٤ - $xy = 1$ ۰ $\mathbb{Z}$

حال با قرار دادن عناصر از مجموعه مربوط به هریك از عبارتهای فوق بجای x و y یك گزاره درست و یك گزاره غلط درست بدست آورید ۰

مجموعه جواب یا مجموعه درستی یك گزاره نما

گزاره نمای $x+1 < 5$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ وگزاره نمای $x+1=0$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم ۰ ملاحظه می‌شود که با قرار دادن ۱, ۲ یا ۳ بجای x در گزاره نمای $x+1 < 5$ یك گزاره درست و با قرار دادن سایر عناصر $\mathbb{N}$ بجای x در $x+1 < 5$ یك گزاره غلط بدست می‌آید ۰ همچنین باقرار دادن ۱- بجای x درگزاره نمای $x+1=0$ یك گزاره درست و با قرار دادن سایر عناصر $\mathbb{Z}$ بجای x درگزاره نمای $x+1=0$ یك گزاره غلط بدست می‌آید ۰ مجموعه های $\{1, 2, 3\}$ و $\{-1\}$ را بترتیب مجموعه های جواب گزاره نماهای $x+1 < 5$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ و $x+1=0$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ می‌نامیم ۰

۱۰۲۰٦ - تعریف

گزاره نمای p_x را بامجموعه جهانی U در نظر بگیریم ۰ مجموعه جواب یا مجموعه درستی p_x عبارتست از مجموعه همه عناصری از U که بازاء هریك از آنها

p_x بیک گزاره درست تبدیل می شود •

بعبارت دیگر اگر مجموعه جواب p_x را با P نمایش دهیم آنگاه داریم :

$$P = \{ x \mid p_x \}$$

۱۰۲۰۷ - مثال

اگر گزاره نمای $x+1 < 5$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ را با p_x نمایش دهیم آنگاه مجموعه جواب p_x عبارتست از :

$$P = \{1, 2, 3\}$$

اگر گزاره نمای $x + 1 = 0$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ را با q_x نمایش دهیم آنگاه مجموعه جهانی q_x عبارتست از :

$$Q = \{-1\}$$

حال گزاره نما های زیر را در نظر می گیریم • مجموعه جهانی وابسته بهر گزاره نما در مقابل آن نوشته شده است•

x عدد اول است و $x > 2$ و $x \leqslant 25$. $\mathbb{N}$

x یك مثلث است •   مجموعه کلیه اشکال واقع در صفحه

$x = x$ • $\mathbb{N}$

$x > 1$ و $x < 1$. $\mathbb{Z}$

اگر گزاره نما های فوق را بترتیب با r_x ، s_x ، t_x و v_x نمایش دهیم آنگاه مجموعه جواب آنها عبارتند از : $R = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ ، $S =$ مجموعه همه مثلثهای واقع در صفحه ، $T = \mathbb{N}$ و $V = \Phi$ •

۱۰۲۰۸ - قضیه

فرض کنیم p_x و q_x دو گزاره نما با مجموعه جهانی U و بترتیب مجموعه‌های جواب P و Q باشند • در اینصورت یك شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعه درستی

گزاره نمای $p_x \Longrightarrow q_x$ برابر مجموعه جهانی U باشد , این است که $P \subseteq Q$ •
بعبارت دیگر $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$ اگر و فقط اگر $\{x|p_x\} \subseteq \{x|q_x\}$ •

اثبات

نشان می‌دهیم که اگر $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$ آنگاه $P \subseteq Q$ • فرض‌کنیم $a \in P$. در اینصورت p_a درست است • چون $P \subseteq U$ و $\{x|p \Longrightarrow q_x\} = U$ پس $a \in U$ و $p_a \Longrightarrow q_a$ درست است• از درست بودن p_a و $p_a \Longrightarrow q_a$ نتیجه می‌شود که q_a درست • پس $a \in Q$ و در نتیجه $P \subseteq Q$ •

حال نشان می‌دهیم که اگر $P \subseteq Q$ آنگاه $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$ •روشن است که $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} \subseteq U$ • فرض کنیم که $a \in U$ • در اینصورت p_a درست است یا p_a غلط است•

اگر p_a درست باشد آنگاه $a \in p$ وچون $P \subseteq Q$ پس $a \in Q$ ودرنتیجه q_a درست است• از درست بودن p_a و q_a نتیجه می‌شود $p_a \Longrightarrow q_a$ درست است • پس $a \in \{x|p_x \Longrightarrow q_x\}$.بنابراین $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$ • اگر p_a غلط باشد آنگاه $p_a \Longrightarrow q_a$ درست است و در نتیجه $a \in \{x|p_x \Longrightarrow q_x\}$ پس $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$• پس در هر حالت نتیجه می‌شود که $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$

از ۱۰۲۰۸ می‌توان نتیجه زیر را بدست آورد •

۱۰۲۰۹ - نتیجه

فرض کنیم p_x و q_x , U , P و Q در شرایط ۱۰۲۰۸ صدق کند •در اینصورت $\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\} = U$ اگر و فقط اگر $P = Q$ •

اثبات

ابتدا توجه می‌کنیم که :

$$\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\} = \{x|p_x \Longrightarrow q_x\} \cap \{x|q_x \Longrightarrow p_x\}$$

زیراکه اگر $a \in \{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\}$ آنگاه $p_a \Longleftrightarrow q_a$ درست است و در نتیجه $p_a \Longrightarrow q_a$ و $q_a \Longrightarrow p_a$ درستند ، یعنی $a \in \{x|p_x \Longrightarrow q_x\} \cap \{x|q_x \Longrightarrow p_x\}$. بر عکس اگر $a \in \{x|p_x \Longrightarrow q_x\} \cap \{x|q_x \Longrightarrow p_x\}$ آنگاه $p_a \Longrightarrow q_a$ و $q_a \Longrightarrow p_a$ درستند و در نتیجه $p_a \Longleftrightarrow q_a$ درست است یعنی $a \in \{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\}$.

حال فرض کنیم $\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\} = U$. نشان می‌دهیم که $P=Q$.

چون $\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\} \subseteq \{x|p_x \Longrightarrow q_x\} \subseteq U$ و $\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\}=U$ پس $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\} = U$ وبنا به ۱۰۲۰۸ داریم $P \subseteq Q$. بطریق مشابه چون $\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\} \subseteq \{x|q_x \Longrightarrow p_x\} \subseteq U$ پس $\{x|q_x \Longrightarrow p_x\} = U$ وبنا به ۱۰۲۰۸ داریم $Q \subseteq P$. بنابراین $P = Q$.

برعکس اگر $P=Q$ آنگاه $P \subseteq Q$ و $Q \subseteq P$ وبنا به ۱۰۲۰۸ ، $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\}=U$ و $\{x|q_x \Longrightarrow p_x\} = U$ ودر نتیجه

$$\{x|p_x \Longleftrightarrow q_x\} = \{x|p_x \Longrightarrow q_x\} \cap \{x|q_x \Longrightarrow p_x\} = U \cap U = U$$

۱۰۲۰۱۰ تمرین

فرض کنیم p_x و q_x دوگزاره نما با مجموعه جهانی U وبترتیب مجموعه‌های جواب P و Q باشند . نشان دهید که مجموعه درستی هریك از گزاره نماهای زیربرابر مجموعه جهانی U است .

(الف) $x \in P \Longleftrightarrow p_x$

(ب) $x \in P \vee x \in Q \Longleftrightarrow p_x \vee q_x$

(ج) $x \in P \wedge x \in Q \Longleftrightarrow p_x \wedge q_x$

(د) $x \in P' \Longleftrightarrow \neg p_x$

در تمرین (د) P' مکمل مجموعه P در U است •
با استفاده از ۱۰۲۰۹ و ۱۰۲۰۱۰, نتیجه زیر را داریم :

۱۰۲۰۱۱ - نتیجه

فرض کنیم p_x ، q_x ، U ، P و Q در شرایط ۱۰۲۰۸ صدق کند •در اینصورت :

(الف) $P \cup Q = \{x | p_x \vee q_x\}$

(ب) $P \cap Q = \{x | p_x \wedge q_x\}$

(ج) $P' = \{x | \neg p_x\}$ که درآن P' مکمل P در U است •

اثبات

(الف) بنا به بند (ب)، ۱۰۲۰۱۰،

$\{x | x \in p \vee x \in Q \Longleftrightarrow p_x \vee q_x\} = U$

بنا به ۱۰۲۰۹، $\{x | x \in p \vee x \in Q\} = \{x | p_x \vee q_x\}$

ولی $\{x | x \in p \vee x \in Q\} = P \cup Q$ و در نتیجه

$P \cup Q = \{x | p_x \wedge q_x\}$

(ب) بنا به بند (ج)، ۱۰۲۰۱۰،

$\{x | x \in p \wedge x \in Q \Longleftrightarrow p_x \wedge q_x\} = U$

بنا به ۱۰۲۰۹،

$\{x | x \in p \wedge x \in Q\} = \{x | p_x \wedge q_x\}$

ولی $\{x | x \in p \wedge x \in Q\} = P \cap Q$ و در نتیجه

$P \cap Q = \{x | p_x \wedge q_x\}$

(ج) بنا به بند (د)، ۱۰۲۰۱۰ $\{x | x \in P' \Longleftrightarrow \neg p_x\} = U$

بنا به ۱۰۲۰۹، $\{x | x \in p'\} = \{x | \neg p_x\}$

ولی $\{x|x\in P'\} = P'$ و در نتیجه $P'=\{x|\neg p_x\}$

نتیجه فوق رابط بین رابطهای گزاره ای ۷، ۸ و ۶ و اعمال بول $\cup$ ، $\cap$ و ' را نشان می دهد .

۱۰۲۰۱۲ تمرین

فرض کنید p_x و q_x دو گزاره نما با مجموعه جهانی U و بترتیب مجموعه های جواب P و Q باشند . در هر یك از بند های زیر با استفاده از گزاره های همیشه درست که در سمت راست نوشته شده اند ، تساویهای سمت چپ را ثابت کنید .

الف) $(P\Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$; $\{x|p_x \Longrightarrow q_x\}=P'\cup Q$

ب) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; $\{x|\neg(p_x \vee q_x)\}= P'\cap Q'$

ج) $\neg(p\vee q) \Longleftrightarrow \neg p\wedge\neg q$; $\{x|\neg(p_x \vee q_x)\}=P'\cup Q'$

د) $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$; $\{x|\neg\neg p_x\}=P$

هـ) $\neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow p\wedge\neg q$; $\{x|\neg(p_x \Longrightarrow q_x)\} = P\cap Q'$

۱۰۲۰۱۳ تمرین

با استفاده از ۱۰۲۰۱۲ تساویهای زیر را ثابت کنید :

الف) $(P\cup Q)' = P'\cap Q'$

ب) $(P\cap Q)' = P'\cup Q'$

ج) $(P')' = P$

تذکر

تساویهای بند (الف) و (ب)، ۱۰۲۰۱۳ به قوانین د مورگان معروفند.

۱۰۳ - سورها

در این قسمت به بررسی جملاتی می‌پردازیم که در آنها عبارت "برای‌هر" و "جود دارد" بکار رفته اند. این جملات نقش مهمی در ساختمان زبان ریاضی دارند. اگر به ۱۰۲۰۳ بند های ۴و۵ رجوع‌کنیم ملاحظه می‌شودکه در جمله بند ٤ عبارت "برای هر" و در جمله بند ۵ عبارت "وجود دارد" بکار رفته اند و با قرار دادن عناصر از مجموعه جهانی بجای x عبارتهای بامفهومی بدست می‌آیند. بنابراین این جملات گزاره نما نیستند. جملات زیر نیز نظیر این دو جمله می‌باشند:

(۱) لااقل یك مثلث x هست‌که با مثلث‌معینی متشابه می‌باشد. مجموعه همه مثلثهای واقع در صفحه

(۲) مجموع هر دو عدد x و y برابر باقیمانده تقسیم x بر y است. IN

(۳) هر انسان x جاویدان است. مجموعه انسانها

(٤) یك حیوان x یافت می‌شود که فانی است. مجموعه حیوانات

(۵) برای همه x ها اگر x یك عدد طبیعی باشد آنگاه x یك عدد صحیح است. IR

ملاحظه می‌شودکه عبارتهای "هر"، "برای همه"، "وجود دارد"، "هست"، "یافت می‌شود" در جملات فوق بکار برده شده اند. توجه کنیدکه مفهوم ریاضی عبارتهای "هر"، "برای هر" و "برای همه" یکسان است. همچنین مفهوم ریاضی عبارتهای "وجود دارد"، "هست" و "یافت می‌شود" نیز یکسان می‌باشد.

سور عومی و سور وجودی ٠

عبارتهای " برای هر " و " وجود دارد " را سور می‌نامیم و بترتیب آنهـا را با نماد $\forall$ و $\exists$ نمایش می‌دهیم ٠ نماد $\forall$ را سور عومی و نماد $\exists$ را سـور وجودی می‌نامیم ٠ با استفاده از این نماد گذاری جملات ٤و٥ در ۲٠۲٠۱ و (۱) الی (٥) فوق بترتیب بصورت زیر نوشته می‌شوند :

(اگر x یك عدد زوج باشد آنگاه x برعدد ۲ قابل قسمت است) $\forall x \in$ IN.

(x فرد است و x از ۳ بزرگتر است) $\exists x \in$ IN.

(x با مثلث معینی متشابه است) $\exists x \in$ مجموعه مثلثهای واقع درصفحه.

(x جاویدان است) $\forall x \in$ مجموعه انسانها.

(x فانی است) $\exists x \in$ مجموعه حیوانات.

(اگر x یك عدد طبیعی باشدآنگاه x یك عدد صحیح است) $\forall x \in$ IR.

در جملات فوق ملاحظه می‌شودکه عبارتهای داخل پرانتز گزاره نما می‌باشند ٠ بطور کلی برحسب سور بکار برده شده در یك جمله تعریف زیر را می‌آوریم :

۱٠۳٠۱ تعریف

اگر p_x یك گزاره نما باشد , آنگاه $\forall x\ p_x$ و $\exists x p_x$ را بترتیب یك جملـه عومی و یك جمله وجودی می‌نامیم ٠ متغیر x در $\forall x\ p_x$ یا $\exists x\ p_x$ رامتغیر وابسته می‌نامیم ٠

تذکـــر

با استفاده از سور عومی،تساوی و زیر مجموعه بودن مجموعه هارا می‌تـوان بصورت زیر بیان کرد:

$$(A = B) \Longleftrightarrow \forall x (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

$$(A \subseteq B) \iff \forall x\,(x \in A \implies x \in B)$$

همچنین اگر $\mathcal{A}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد آنگاه با استفاده از سور عمومی $\cup\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}$ را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\cup\mathcal{A}=\{x|\exists X(X\in\mathcal{A} \wedge x \in X)$$

$$\cap\mathcal{A}=\{x|\forall X(X\in\mathcal{A} \implies x \in X)$$

ترکیب سورها

ممکن است که در جمله ای بیش از یک سور بکار آید . جملات زیر را درنظر می‌گیریم :

برای هر x و برای هر y داریم $x+y=0$. $\mathbb{R}$

برای هر x وجود دارد y بطوریکه $x+y=0$. $\mathbb{Z}$

یك x وجود دارد بطوریکه برای هر y داریم $x+y=0$. $\mathbb{R}$

یك x وجود دارد و یك y وجود دارد بطوریکه $x+y=0$. $\mathbb{Z}$

با استفاده از نمادها $\forall$ و $\exists$ جملات فوق بترتیب بصورت زیر نوشته می‌شوند :

$\forall x\ \forall y\ (x+y=0)$ $\mathbb{R}$

$\forall x\ \exists y\ (x+y=0)$ $\mathbb{Z}$

$\exists x\ \forall y\ (x+y=0)$ $\mathbb{R}$

$\exists x\ \exists y\ (x+y=0)$ $\mathbb{Z}$

بطورکلی اگر p_{xy} یك گزاره نمای دو متغیره باشد , آنگاه هریك از جملات

$\exists x\exists y\ (p_{xy})$ و $\exists x\forall y\ (p_{xy})$, $\forall x\exists y(p_{xy})$, $\forall x\forall y\ (P_{xy})$

را بترتیب بر حسب اولین سور آنها از طرف چپ جمله عومی , جمله عومی , جملـه وجودی و جمله وجودی می‌نامیم . متغیرها x و y در این جملات را متغیرهـای

وابسته می‌نامیم • بهمین ترتیب ممکن است که در یك جمله که شامل یك گزاره نما سه , چهار یا n متغیر باشد چندین سور بکار رفته باشد •

۱۰۳۰۲ - تمرین

با استفاده از سورها , رابطهای گزاره ای و نماد های ریاضی نظیر, + , > , ∩ , ⊆ , عبارتهای زیر را بصورت خلاصه بنویسید و سپس تعیین کنید که کدامیك جمله عومی و کدامیك جمله وجودی است •

۱- برای هر x , x فرد است یا x زوج است• $\mathbb{N}$

۲- برای هر x و هر y حاصلضرب x و y بزرگتر از حاصل جمع x و y است • $\mathbb{R}$

۳- برای هر x یك y وجود دارد بطوریکه y کوچکتر از x نیست• $\mathbb{R}$

٤- برای هر x یك y وجود دارد بطوریکه اشتراك x با y برابر اجتماع x با y است• $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

٥- یك x و یك y وجود دارند بطوریکه y شامل x است• $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

مقایسه متغیر آزاد با متغیر وابسته

همانطوریکه قبلاً گفته شد متغیر واقع در یك گزاره نما را متغیر آزاد و متغیر واقع در یك جمله عومی یا یك جمله وجودی را متغیر وابسته می‌نامیم • می‌دانیم که اگر عضری از مجموعه جهانی بجای یك متغیر آزاد در یك گزاره نما قرار دهیم آنگاه یك گزاره بدست می‌آید , درحالیکه این مطلب در مورد کلیه جملاتی که شامل متغیر وابسته هستند صادق نیست • مثلاً اگر جمله وجودی $(\exists x \ (x > 2)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ را در نظر بگیریم آنگاه با قرار دادن عضری از $\mathbb{N}$ بجای x عبارت نامفهومی بدست می‌آید •

درستی جملات عومی و وجودی

جملات عومی و وجودی زیر را در نظر می‌گیریم • مجموعه جهانی وابسته به هریك از جملات زیر $\mathbb{R}$ است•

$$\forall x \quad (x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}) \qquad (۱)$$

$$\forall x \quad (x^{۲}-۵x+۶=۰) \qquad (۲)$$

$$\exists x \quad (x^{۲}-۵x+۶=۰) \qquad (۳)$$

$$\exists x \quad (x^{۲}+۱=۰) \qquad (۴)$$

بسهولت دیده می‌شود که جمله عومی (۱) درست ، جمله عومی (۲) غلط ، جمله وجودی (۳) درست و جمله وجودی (۴) غلط است • با استفاده از مفهوم مجموعه جواب یك گزاره نمامی‌توان قاعده ای برای تعیین درست بودن یا غلط بودن جمله های عومی و جمله های وجودی بدست آورد • گزاره نما های وابسته به هریك از جملات (۱) الی (۴) را بترتیب زیر در نظر می‌گیریم :

$$x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲} \qquad (۱)'$$

$$x^{۲}-۵x+۶=۰ \qquad (۲)'$$

$$x^{۲}-۵x+۶=۰ \qquad (۳)'$$

$$x^{۲}+۱=۰ \qquad (۴)'$$

مجموعه های جواب گزاره نما های $(۱)'$ الی $(۴)'$ بترتیب عبارتند از : $\mathbb{R}$ ، $\{۲,۳\}$ ، $\{۲,۳\}$ و Φ • بنابراین مجموعه درستی گزاره نمای $(۱)'$ برابر مجموعه جهانی است • بعبارت دیگر اگر بجای x در $(۱)'$ هر عنصر از مجموعه جهانی قرار دهیم گزاره حاصل یك گزاره درست است• پس جمله عومی (۱) درست است •

مجموعه درستی گزاره نمای (۲) برابر مجموعه جهانی نیست• بعبارت دیگر عنصری در مجموعه جهانی هست که به ازای آن گزاره نمای (۲)′ تبدیل بیک گزاره غلط می‌شود • پس جمله عومی (۲) غلط است • مجموعه جواب گزاره نمای (۳)′ تهی نیست بعبارت دیگر عنصری در مجموعه جهانی هست که اگر بجای x در گزاره نمای (۳) قرار گیرد , حاصل یک گزاره درست است • پس جمله وجودی (۳) درست است• مجموعه جواب گزاره نمای (٤)′ تهی است• بعبارت دیگر عنصری در مجموعه جهانی وجود ندارد که بازای آن گزاره نمای (٤)′ بیک گزاره درست تبدیل شود • پس جمله وجودی (٤) غلط است •

حال با درنظر گرفتن بحث فوق , قاعده کلی زیر را در مورد درستی جملات عومی و وجودی بیان می‌کنیم •

قاعـــده

جمله عومی $\forall x p_x$, جمله وجودی $\exists x\ p_x$ و وابسته به آنها مجموعه جهانی U را در نظر می‌گیریم • فرض می‌کنیم مجموعه جواب گزاره نمای p_x باشد•

اگر $P = U$ آنگاه جمله عومی $\forall x p_x$ درست است•

اگر $P \neq U$ آنگاه جمله عومی $\forall x p$ غلط است•

اگر $P \neq \Phi$ آنگاه جمله وجودی $\exists x p_x$ درست است •

اگر $P = \Phi$ آنگاه جمله وجودی $\exists x p_x$ غلط است •

تـذکـر

همانطوریکه در ابتدای این فصل گفته شد گزاره عبارتی است که درست یا غلط باشد • چون جملات عومی یا وجودی نیز درست یا غلط هستند پس این نوع جملات نیز گزاره می باشند •

۱۰۳۰۲ - مثال

تعیین می‌کنیم که کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک غلط است•

(الف) $\forall x$ (x زوج است) $\vee$ $\forall x$ (x فرد است) . $\mathbb{N}$

(ب) $\exists x$ (x زوج است) $\vee$ $\forall x$ (فرد است) . $\mathbb{N}$

(ج) $\exists X\ (X\cap\Phi\neq\Phi)\ \wedge\ \forall X\ (X\cup X'\neq\Phi)$. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(د) $\neg\exists X\ (X\cup X'\neq\Phi)\ \Longrightarrow\ \forall X\ (X\cup X'=\mathbb{N})$. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

گزاره نماهای " x فرد است " , " x زوج است " , " $X\cup X'\neq\Phi$ " , " $X\cap\Phi\neq\Phi$ " و " $X\cup X'=\mathbb{N}$ " را بترتیب با p_x , q_x , r_x , s_x و t_x و مجموعه های جواب این گزاره نما ها را بترتیب با P , Q , R , S و T نمایش می دهیم •

(الف) چون $P\neq\mathbb{N}$ و $Q\neq\mathbb{N}$ پس جملات عومی $\forall xp_x$, $\forall xq_x$ هر دو غلط هستند • بنا به تعریف ارزش درستی " $\vee$ " جمله $\forall xp_x\vee\forall xq_x$ غلط است •

(ب) چون $P\neq\mathbb{N}$ و $Q\neq\Phi$ پس جمله عومی $\forall xp_x$ غلط و جمله وجودی $\exists xq_x$ درست است • بنا به تعریف ارزش درستی " $\vee$ " جمله $\forall xp\vee\exists xq_x$ درست است •

(ج) چون $R=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $S=\Phi$ پس جمله عومی $\forall Xr_X$ درست و جمله وجودی $\exists Xs_X$ غلط است بنا به تعریف ارزش درستی " $\wedge$ " جمله $\forall X\,r_X\wedge\exists Xs_X$ غلط است •

(د) چون $T=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ پس جمله عومی $\forall Xt_X$ درست است • مطابق بند (ج) چون $R\neq\Phi$ پس جمله وجودی $\exists Xr_X$ درست و در نتیجه $\neg\exists Xr_X$ غلط است • بنا به تعریف ارزش درستی " $\Longrightarrow$ " جمله $\forall Xt_X\Longrightarrow\neg\exists Xr_X$ غلط است•

تذکر

فرض کنیم p_x یک گزاره نما با مجموعه جهانی U باشد • اگر U یک مجموعه متناهی و مساوی $\{a_1, \ldots, a_n\}$ باشد آنگاه جمله عمومی $\forall x p_x$ معادل گزاره $p_{a_1} \wedge \ldots \wedge p_{a_n}$ و جمله وجودی $\exists x p_x$ معادل گزاره $p_{a_1} \vee \ldots \vee p_{a_n}$ است • زیرا که روشن است $\forall x p_x$ درست است اگر و فقط اگر گزاره $p_{a_1} \wedge \ldots \wedge p_{a_n}$ درست باشد و همینطور جمله وجودی $\exists x p_x$ درست است اگر و فقط اگر گزاره $p_{a_1} \vee \ldots \vee p_{a_n}$ درست باشد • بنابراین وقتی که مجموعه جهانی وابسته به یک گزاره نما متناهی باشد می‌توان فقط از رابطهای گزاره ای استفاده کرد و احتیاجی به سورها نمی باشد • ولی وقتی مجموعه جهانی نامتناهی باشد آنگاه وجود سورها الزامی است •

۱۰۳۰٤ - تمرین

با در نظر گرفتن جملات زیر نشان دهید که جملات (الف) الی (د) درست و جملات (هـ) و (و) غلط هستند •

(الف) $\forall x$. (x فرد است $\vee$ x زوج است) — $\mathbb{N}$

(ب) $\forall x$. (همه زوایای x باهم برابرند $\Longrightarrow$ x مثلث متساوی الاضلاع است) — مجموعه کلیه اشکال هندسی در صفحه

(ج) $\exists X$. ($X' = \mathbb{N}$) — $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(د) $\exists x$. (x فانی است) — مجموعه کلیه موجودات زنده

(هـ) $\forall X$. ($X \cup \Phi = \Phi$) — $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(و) $\exists x$. (x جاویدان است) — مجموعه کلیه موجودات زنده

۱۰۳۰۵ - تمرین

با در نظر گرفتن جملات زیر تعیین کنید که کدامیک درست و کدامیک غلط است •

(الف) $\exists x\,(x>2) \wedge \neg\exists x\,(x^2+1=0)$ ، $x \in \mathbb{N}$

(ب) $(2>3) \Rightarrow \exists x$ (x اول است $\wedge$ x زوج است) ، $x \in \mathbb{N}$

(ج) $\exists X\,(X \cup \Phi = \Phi) \Rightarrow (\forall X\,(X' = X) \wedge \forall X\,(X - X \neq \Phi))$ ، $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

تذکر

اگر جمله عمومی $\forall x p_x$ درست باشد ، یعنی مجموعه جواب گزاره نمای p_x مساوی مجموعه جهانی باشد ، آنگاه ممکن است که از نوشتن سور عمومی $\forall$ صرفنظر شود و وجود آن بطور ضمنی درك شود • مثلاً وقتی که گفته می‌شود معادله $x^2-1=(x-1)(x+1)$ که به آن مجموعه جهانی $\mathbb{R}$ وابسته است درست می‌باشد ، وجود سور عمومی بطور ضمنی پذیرفته می‌شود • بعبارت دیگر منظور از درست بودن معادله $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ، درست بودن جمله عمومی $\forall x\,(x^2-1=(x-1)(x+1))$ است •

۱۰۳۰۶ - تمرین

در کدامیک از جملات زیر می‌توان از نوشتن سور عمومی صرفنظر کرد ؟

(الف) $\forall x\,((x+1)^2 = x^2+2x+2)$ ، $\mathbb{R}$

(ب) $\forall x\,(x \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R})$ ، $\mathbb{R}$

(ج) $\forall X\,(X \neq \phi \Longrightarrow X' = \mathbb{N})$ ، $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

جملات همیشه درست یا معتبر

جمله عومی $\forall x\,(2^x < 3^x)$ را با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که مجموعه درستی گزاره نمای $2^x < 3^x$ مساوی $\mathbb{N}$ یعنی مجموعه جهانی است و در نتیجه جمله عومی $\forall x\,(2^x < 3^x)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ درست است. حال اگر مجموعه جهانی $\mathbb{R}$ به جمله عومی $\forall x\,(2^x < 3^x)$ وابسته باشد، آنگاه این جمله غلط است. زیرا که مجموعه درستی گزاره نمای $2^x < 3^x$ مخالف $\mathbb{R}$ است، مثلاً داریم $2^{-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = 3^{-1}$.

نتیجه می‌شود که جمله عومی $\forall x\,(2^x < 3^x)$ نسبت به بعضی از مجموعه های جهانی وابسته به آن درست و نسبت به بعضی دیگر غلط است. در اینصورت می‌گوئیم که این جمله همیشه درست یا معتبر نیست.

۱۰۳۰۷ - تعریف

اگر یک جمله نسبت به هر مجموعه جهانی وابسته به آن درست باشد آنگاه آن جمله را یک جمله همیشه درست یا معتبر می‌نامیم.

۱۰۳۰۸ - مثال

فرض کنیم p_x و q_x دو گزاره نما با مجموعه جهانی U و بترتیب مجموعه های درستی P و Q باشند. در اینصورت جمله زیر یک جمله معتبر است.

$$(\forall x p_x) \vee (\forall x q_x) \implies \forall x\,(p_x \vee q_x) \quad (*)$$

اگر $(\forall x p_x) \vee (\forall x q_x)$ غلط باشد آنگاه بنا به ارزش درستی $\implies$ جمله $(*)$ درست است.

پس فرض کنیم $(\forall x p_x)\ \text{Y}\ (\forall x q_x)$ درست باشد • در اینصـــورت $\forall x p_x$ درست است یا $\forall x q_x$ درست است • بنابراین $P=U$ یا $Q=U$ •
حال بنا به ۱۰۲۰۱۱ بند (الف)، $\{x|p_x\ \text{Y}\ q_x\} = P \cup Q$
و در نتیجه $P \cup Q = U$ یعنی جمله $\forall x\ (p_x\ \text{Y}\ q_x)$ درست است • بنابراین جمله (*) درست است • پس در هر حالت جمله (*) درست است • ملاحظـــه می‌شود مجموعه جهانی وابسته به جمله (*) یك مجموعه دلخواه می‌باشد و درست بودن جمله (*) مستقل از مجموعه جهانی است• بنابراین جمله (*) یك جملـــه همیشه درست یا معتبر می‌باشد •

<u>۱۰۳۰۹ - قضیـــه</u>

فرض کنیم p_x یك گزاره نما با مجموعه جهانی U باشد • در اینصورت هریك از جملات زیر معتبر است •

(۱) $\neg \forall x p_x \Longleftrightarrow \exists x \neg p_x$

(۲) $\forall x p_x \Longleftrightarrow \neg \exists x \neg p_x$

(۳) $\neg \exists x p_x \Longleftrightarrow \forall x \neg p_x$

(٤) $\exists x p_x \Longleftrightarrow \neg \forall x \neg p_x$

<u>اثبـات</u>

فرض کنیم مجموعه جواب p_x مساوی P و مکمل آن در U مساوی P' باشد •
(۱) فرض کنیم $\neg \forall x p_x$ درست باشد • در اینصورت $\forall x p_x$ غلط است • پـــس $P \neq U$ و در نتیجه $P' \neq \phi$ • بنابه ۱۰۲۰۱۱ بند (ج)، $P'=\{x|\neg p_x\}$.

پس جمله وجودی $\exists x \neg p_x$ درست است. حال فرض کنیم $\neg \forall x p_x$ غلط باشد . در اینصورت $\forall x p_x$ درست است. پس $P = U$ و در نتیجه $P' = \Phi$. پس جمله $\exists x \neg p_x$ غلط است . بنا به ارزش درستی $\Longleftrightarrow$ جمله (۱) درست است و در نتیجه یك جمله معتبر است.

(۲) چون گزاره $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longleftrightarrow \neg q)$ یك گزاره همیشه درست است پس از معتبر بودن جمله (۱) نتیجه می‌شود که جمله زیر معتبر است.

$$\neg(\neg \forall x p_x) \Longleftrightarrow \neg(\exists x \neg p_x)$$

چون گزاره $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$ همیشه درست است پس نتیجه می‌شود که جمله زیر معتبر است .

$$\forall x p_x \Longleftrightarrow \neg \exists x \neg p_x$$

یعنی جمله (۲) معتبر است.

(۳) فرض کنیم $\neg \exists x p_x$ درست باشد . در اینصورت $\exists x p_x$ غلط است . پس $P = \Phi$ و در نتیجه $P' = U$. چون $p' = \{x \mid \neg p_x\}$ پس جمله $\forall x \neg p_x$ درست است. حال فرض کنیم $\neg \exists x p_x$ غلط است . در اینصورت $\exists x p_x$ درست است . پس $P \neq \Phi$ و در نتیجه $P' \neq U$ ، پس جمله $\forall x \neg p_x$ غلط است . بنا به ارزش درستی $\Longleftrightarrow$ جمله (۳) درست است و در نتیجه یك جمله معتبر است.

(٤) با استفاده از گزاره همیشه درست $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longleftrightarrow \neg q)$ وبا توجه به جمله معتبر (۳) نتیجه می‌شود که جمله زیر معتبر است :

$$\neg(\neg \exists x p_x) \Longleftrightarrow \neg \forall x \neg p_x$$

بنا براین جمله $\exists x p_x \Longleftrightarrow \neg \forall x \neg p_x$ معتبر است یعنی جمله (٤) معتبر است .

۱۰۳۰۱۰ - تمرین

فرض کنید p_x و q_x دو گزاره نما با مجموعه جهانی U باشند و $a \in U$ • نشان دهید که جملات زیر معتبرند •

(الف) $\forall x p_x \Longrightarrow p_a$

(ب) $p_a \Longrightarrow \exists x p_x$

(ج) $(\forall x p_x \wedge \forall x q_x) \Longleftrightarrow \forall x (p_x \wedge q_x)$

(د) $(\exists x p_x \vee \exists x q_x) \Longleftrightarrow \exists x (p_x \vee q_x)$

(هـ) $\forall x (p_x \vee \neg p_x)$

(و) $\exists x p_x \vee \neg \exists x p_x$

(ز) $\forall x (p_x \Longrightarrow q_x) \Longleftrightarrow \forall x (\neg q_x \Longrightarrow \neg p_x)$

درستی جملات با بیش از یك سور

فرض کنیم p_{xy} یك گزاره نمای دو متغیره با مجموعه جهانی U باشد •

(۱) جمله $\forall x \forall y p_{xy}$ درست است اگر با قرار دادن هر دو عنصر a و b از مجموعه U بجای x و y در p_{xy} یك گزاره درست p_{ab} بدست آید •

مثلاً جمله $\forall x \forall y \ (x + y = y + x)$ با مجموعه جهانی IN یك جمله درست است زیرا که با قرار دادن هر دو عنصر a و b از IN بجای x و y در گزاره نمای جمله فوق , گزاره درست $a + b = b + a$ بدست می آید • حال جمله $\forall x \forall y \ (y = 2x)$ با مجموعه جهانی IN غلط است زیرا که مثلاً اگر بجای x عدد ۱ و بجای y عدد ۳ را قرار دهیم

آنگاه گزاره غلط ۱×۲=۳ بدست می‌آید • پس جمله ($\forall x \forall y \ (y = 2x)$ به ازای هر جایگزینی x و y درست نمی‌باشد و در نتیجه یک جمله غلط است •

(۲) جمله $\exists x \exists y \ p_{xy}$ درست است اگر لااقل یک a و لااقل یک b در U وجود داشته باشد بطوریکه وقتی بترتیب بجای x و y در گزاره نمای p_{xy} قرار گیرند گزاره p_{ab} درست باشد • مثلاً جمله ($\exists x \exists y \ (x^2 + y^2 = 1)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ درست است زیرا که مثلاً بازاء $x = 1$ و $y = 0$ گزاره نمای $x^2 + y^2 = 1$ بیک گزاره درست تبدیل می‌شود • ولی جمله ($\exists x \exists y \ (xy = -1)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ غلط است• زیرا که حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی نمی‌تواند یک عدد منفی باشد • پس وجود ندارد a و b در $\mathbb{N}$ بطوریکه با قرار دادن آنها بجای x و y در گزاره نمای $xy = -1$ یک گزاره درست بدست آید و در نتیجه جمله ($\exists x \exists y \ (xy = -1)$ غلط است•

(۳) جمله $\forall x \exists y \ p_{xy}$ درست است اگر برای هر عنصر a از U که بجای x در گزاره نمای p_{xy} قرار گیرد وجود داشته باشد عنصر b در U بطوریکه وقتی b بجای y در گزاره نمای p_{xy} قرار گیرد گزاره حاصل p_{ab} درست باشد • مثلاً جمله ($\forall x \exists y \ (x + y = 0)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ درست است • زیرا که برای هر a در $\mathbb{Z}$ وجود دارد b در $\mathbb{Z}$ ($b = -a$) که وقتی a و b بترتیب بجای x و y درگزاره نمای $x + y = 0$ قرار گیرند گزاره $a + b = 0$ یک گزاره درست است • ولی جمله ($\forall x \exists y \ (x = 2y)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ غلط است • زیرا که مثلاً بازاء $x = 3$ عدد b در $\mathbb{N}$ وجود ندارد بطوریکه تساوی $3 = 2b$ بر قرار باشد •

(٤) جمله $\exists x \forall y\ p_{xy}$ درست است اگر عنصر a در U وجود داشته باشد بطوریکه وقتی a بجای x در گزاره نمای p_{xy} قرار گیرد , برای هر عنصر b از U که بجای y در گزاره نمای p_{xy} قرار گیرد گزاره حاصل p_{ab} درست باشد • مثلاً جمله $\exists x \forall y\ (x+y=y)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ درست است • زیرا که بازاء $x=0$ برای هر b در $\mathbb{Z}$ که بجای y در گزاره نمای $x+y=y$ قرار گیرد گزاره $0+b=b$ یك گزاره درست است • ولی جمله $\exists x \forall y (x>y)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ غلط است • زیرا که عنصر a در $\mathbb{N}$ وجود ندارد بطوریکه برای هر b در $\mathbb{N}$ اگر b بجای y در گزاره نمای $x>y$ قرار گیرد گزاره $a>b$ درست باشد • مثلاً می دانیم که گزاره $a>a$ غلط است•

<u>تذکر</u>

بین جملاتی که در بند های (۳) و (٤) در نظر گرفته شدند یعنی جملات $\forall x \exists y\ p_{xy}$ و $\exists x \forall y\ p_{xy}$ تفاوت عمده ای وجود دارد • اگر جمله $\forall x \exists y p_{xy}$ درست باشد آنگاه بین x و y یك وابستگی وجود دارد • بدین معنی که برای هر $a \in U$ که وقتی بجای x در p_{xy} قرار گیرد عنصر $b \in U$ که به a وابسته است وجود دارد بطوریکه وقتی b بجای y در p_{xy} قرار گیرد گزاره p_{ab} درست است• مثلاً اگر جمله $\forall x \exists y (x+y=0)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیریم آنگاه بازاء $x=1$ با قرار دادن $y=-1$ و بازاء $x=2$ با قرار دادن $y=-2$ و غیره گزاره $x+y=0$ تبدیل بیك گزاره درست می شود • همانطوری که ملاحظه می‌کنید y به انتخاب x بستگی دارد • در حالیکه اگر جمله $\exists x \forall y\ p_{xy}$ درست باشد آنگاه بین x و y وابستگی وجود ندارد • مثلاً جمله $\exists x \forall y\ (x+y=y)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ بازاء $x=0$ و برای هر b از $\mathbb{Z}$ که بجای y در $x+y=y$ قرار گیرد گزاره $0+b=b$ درست است

در اینجا ملاحظه می‌شود که $x = 0$ بستگی به انتخاب y در $\mathbb{Z}$ ندارد .

<u>۱۰۳۰۱۱ - تمرین</u>

با در نظر گرفتن جملات زیر تعیین کنید که کدامیک درست و کدامیک غلط است .

(الف) $\exists x \forall y \, (x + y = y)$. $\mathbb{N}$

(ب) $\forall x \exists y \, (x = y)$. $\mathbb{N}$

(ج) $\exists x \forall y \, (x = y)$. $\mathbb{N}$

(د) $\exists x \exists y \, (x + 0 = 2 + y)$. $\mathbb{Z}$

(هـ) $\forall x \forall y \, (x \in Z \wedge y \in Z \Longrightarrow x/y \in \varnothing)$ $\mathbb{R}$

(و) $\forall x \forall y \, (x \in Z \wedge y \in Z \wedge y \neq 0 \Longrightarrow x/y \in \varnothing)$. $\mathbb{R}$

<u>تذکر</u>

همانطوریکه قبلاً گفته شد اگر درست بودن یك جمله بستگی به مجموعه جهانی نداشته باشد آنگاه آن جمله یك همیشه درست یا معتبر نامیده می‌شود . مثلاً دیدیم که جمله $\exists x \forall y \, (x + y = y)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{Z}$ درست است در حالیکه این جمله با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ درست نمی‌باشد . بنابراین ، این جمله همیشه درست یا معتبر نیست . به مثال زیر توجه می‌کنیم .

<u>۱۰۳۰۱۲ - مثال</u>

گزاره نمای p_{xy} با مجموعه جهانی U را در نظر می‌گیریم • جمله زیر یك جمله معتبر است :

$$\exists y \forall x \; p_{xy} \Longrightarrow \forall x \exists y \; p_{xy} \qquad (*)$$

این مطلب را اثبات می‌کنیم • اگر $\exists y \forall x \; p_{xy}$ غلط باشد آنگاه بنا بـه ارزش درستی $\Leftarrow$ جمله (*) درست است • فرض کنیم $\exists y \forall x \; p_{xy}$ درست است • در اینصورت $a \in U$ وجود دارد بطوریکه بازاء $y = a$ بـرای هر $b \in U$ که بجای x قرارگیرد گزاره p_{ba} درست است • پس بـرای هـر $b \in U$ که بجای x در گزاره نمای p_{xy} قرار گیرد وجود دارد $a \in U$ بطوریکه بازاء $y = a$ گزاره نمای p_{ba} درست است • بنا براین جملـــه $\forall x \exists y \; p_{xy}$ درست است • بنا به ارزش درستی $\Longrightarrow$ جمله (*) درست است • ملاحظه می‌شودکه درستی جمله (*) بستگی به مجموعه جهانی ندارد و در نتیجه یك جمله معتبر است •

<u>۱۰۳۰۱۳ - قضیـه</u>

گزاره نمای p_{xy} با مجموعه جهانی U را در نظـر می‌گیریم • در اینصورت جملات زیر معتبرند •

(الف) $\neg(\forall x \forall y \; p_{xy}) \Longleftrightarrow \exists x \exists y \; (\neg p_{xy})$

(ب) $\neg(\forall x \exists y \; p_{xy}) \Longleftrightarrow \exists x \forall y \; (\neg p_{xy})$

(ج) $\neg(\exists x \forall y \; p_{xy}) \Longleftrightarrow \forall x \exists y \; (\neg p_{xy})$

(د) $\neg(\exists x \exists y \; p_{xy}) \Longleftrightarrow \forall x \forall y \; (\neg p_{xy})$

۱۰۳۰۱٤ - تمرین

۱۰۳۰۱۳ را اثبات کنید .

۱۰٤ - استنتاج و بحث معتبر

معمولاً هر نتیجه گیری متکی بر یک سری مفروضات است . بعبارت دیگر یک بحث از مفروضاتی شروع می شود و بیک نتیجه ختم می‌گردد . اگر چنانچه در یک بحث بفرض صحت مفروضات آن ، نتیجه آن نیز صحیح باشد ، آنگاه آنرا یک بحث وارد می‌دانیم . بچند مثال زیر توجه می‌کنیم . در هریک از این مثالها مفروضات بحث در بالای خط و نتیجه آن در پائین خط آمده اند .

(الف) ۱۲ یک عدد زوج است .
چون ۱۲ یک عدد زوج است پس ۱۲ بر عدد ۲ قابل قسمت است .
______
۱۲ بر عدد ۲ قابل قسمت است .

(ب) چون ٢٤ بر ١٢ قابل قسمت است پس ٢٤ بر ٦ قابل قسمت است .
چون ٢٤ بر ٦ قابل قسمت است پس ٢٤ بر ٣ قابل قسمت است .
______
چون ٢٤ بر ١٢ قابل قسمت است پس ٢٤ بر ٣ قابل قسمت است .

(ج) چون ۵ یک عدد طبیعی است پس ۵ یک عدد صحیح است .
چون ۵ یک عدد صحیح است پس ۵ یک عدد گویا است .
چون ۵ یک عدد گویاست پس ۵ یک عدد حقیقی است .
______
چون ۵ یک عدد طبیعی است پس ۵ یک عدد حقیقی است .

(د) سقراط انسان است •

برای هر x اگر x یك انسان باشد آنگاه x فانی است •

سقراط فانی است •

(هـ) برای هر x اگر x یك عدد طبیعی باشد آنگاه x یك عدد فرد است یا x یك عدد زوج است •

برای هر x اگر x یك عدد فرد باشد آنگاه x یك عدد صحیح است•

برای هر x اگر x یك عدد زوج باشد آنگاه x یك عدد صحیح است•

برای هر x اگر x یك عدد طبیعی باشد آنگاه x یك عدد صحیح است•

در هر یك از بحثهای فوق ملاحظه می‌کنیم که در صورت صحت مفروضات بحث , نتیجه آن نیز صحیح است • حال به تعریف دقیق نکاتی که به آنها اشاره کردیم می‌پردازیم•

۱۰٤۰۱ - تعریف

فرض کنید $q, p_n, \ldots, p_1$ گزاره باشند •

(الف) اگر در کلیه حالاتی که $p_n, \ldots, p_1$ درست باشند نتیجه بدهد که q نیز درست است , آنگاه q را استنتاج منطقی $p_n, \ldots, p_1$ می‌نامیم •

(ب) اگر q استنتاج منطقی $p_n, \ldots, p_1$ باشد , آنگاه دنباله $p_n, \ldots, p_1$ و استنتاج منطقی آن q را یك بحث منطقی یا یك بحث معتبرمی‌نامیم• $p_n, \ldots, p_1$ را مفروضات و q را نتیجه بحث معتبر می‌نامیم و آنرا توسط نماد زیر نمایش می‌دهیم :

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

۲۰۴۰۱ - مثال

با توجه به تعریف فوق به مطالعه مثالهای (الف) الی (هـ) که در ابتدای این قسمت آمده اند می‌پردازیم • در هر یك از مثالها نماد هایی بجای جملات فارسی انتخاب می‌کنیم •

(الف) ۱۲ یك عدد زوج است = p
۱۲ برعدد ۲ قابل قسمت است = q

در اینصورت با انتخاب این نماد ها بحث بصورت زیر در می‌آید :

$$\begin{array}{l} p \\ p \Longrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

برای بررسی معتبر بودن این بحث جدول درستی زیر را در نظر می‌گیریم :

شماره سطر	p	q	p ══>q
۱	۱	۱	۱
۲	۱	۰	۰
۳	۰	۱	۱
٤	۰	۰	۱

بنا به فرض p درست است • پس سطرهای ۱و۲ را در جدول فوق در نظر می‌گیریم• چون بنا به فرض p ══>q درست است پس فقط سطر ۱ در جدول فوق مورد نظر خواهد بود و در این سطر ملاحظه می‌شود که q نیز درست است• بنابراین بفرض درست بودن p و q ══> p که مفروضات بحث هستند , q نیز که نتیجه بحث است , درست می‌باشد • بنا به ۱۰۳۰۱, q استنتاج منطقی p و p ══>q

و بحث زیر یک بحث معتبر است.

$$\begin{array}{l} p \\ p \Longrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

(ب) ۲٤ بر ۱۲ قابل قسمت است = p

۲٤ بر ٦ قابل قسمت است = q

۲٤ بر ۳ قابل قسمت است = r

با انتخاب این نماد ها بحث بصورت زیر در می‌آید :

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \\ \hline p \Longrightarrow r \end{array}$$

برای بررسی معتبر بودن این بحث جدول درستی زیر را در نظر می‌گیریم.

شماره سطر	p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow r$	$p \Longrightarrow r$
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۳	۱	۰	۱	۰	۱	۱
٤	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۵	۰	۱	۱	۱	۱	۱
٦	۰	۱	۰	۱	۰	۱
۷	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۸	۰	۰	۰	۱	۱	۱

بنا به فرض $p \Longrightarrow q$ و $q \Longrightarrow r$ درست هستند • پس در جدول فوق فقط سطرهای ۱, ۵, ۷ و ۸ مورد نظرند • ملاحظه می شود که در این سطرها , $p \Longrightarrow r$ همیشه درست است • بنابراین بحث فوق یک بحث معتبر است •

(ج) p = ۵ یک عدد طبیعی است

q = ۵ یک عدد صحیح است

r = ۵ یک عدد گویاست

s = ۵ یک عدد حقیقی است

در اینصورت بحث بصورت زیر در می آید :

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \\ r \Longrightarrow s \\ \hline p \Longrightarrow s \end{array}$$

برای بررسی معتبر بودن این بحث می توان مانند روشی که در مثالهای (الف) و (ب) ارائه شد عمل کرد و جدول درستی وابسته به این بحث را تشکیل داد • ولی بعلت بزرگی جدول که دارای شانزده سطر می شود از روش دیگر که اثبات بوسیله برهان خلف نامیده می شود استفاده می کنیم • در این روش فرض می کنیم که بحث معتبر نباشد و سپس بیک تناقض می رسیم • پس نتیجه می گیریم که بحث معتبر است • در مورد روش اثبات بوسیله برهان خلف در قسمت بعدی درس بطور مفصل صحبت خواهیم کرد •

اگر بحث معتبر نباشد آنگاه باید $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$ و $r \Longrightarrow s$ درست باشد و $p \Longrightarrow s$ غلط باشد • در اینصورت خواهیم داشت :

(۱) چون $p \Longrightarrow s$ غلط است پس p درست و s غلط است •

(۲) چون $p \Longrightarrow q$ درست است و بنا به (۱) ، p درست است.پس q درست است•

(۳) چون $q \Longrightarrow r$ درست است و بنا به (۲)، q درست است.پس r درست است •

(٤) چون $r \Longrightarrow s$ درست است و بنا به (۳)، r درست است.پس s درست است •

(٥) بنا به (۱), s غلط است و بنا به (٤) , s درست است•

نتیجه (٥) یك تناقض است • بنابراین فرض معتبر نبودن بحث فوق درست نیست و در نتیجه بحث معتبر است•

(د) x یك انسان است = p_x

x فانی است = q_x

در اینصورت جمله " برای هر x اگر x یك انسان باشد , آنگاه x فانی است" بصورت $\forall x(p_x \Longrightarrow q_x)$ در می‌آید • فرض می‌کنیم مجموعه جهانی وابسته به این جمله مجموعه انسانها باشد و آنرا با H نمایش می‌دهیم • اگر سقراط را که عصری از مجموعه H است , با a نشان دهیم , آنگاه بحث بصورت زیر در می‌آید •

$$\frac{\begin{array}{c} p_a \\ \forall x(p_x \Longrightarrow q_x) \end{array}}{q_a}$$

برای اثبات معتبر بودن این بحث توجه می‌کنیم که چون $\forall x(p_x \Longrightarrow q_x)$ درست است پس مجموعه جواب گزاره نمای $p_x \Longrightarrow q_x$ برای مجموعه جهانی یعنی H است و چون $a \in H$ پس $p_a \Longrightarrow q_a$ درست است و در نتیجه q_a درست است , زیرا که p_a درست است •

(هـ) x یك عدد طبیعی است = p_x

x یك عدد فرد است = q_x

x یك عدد زوج است = r_x

x یك عدد صحیح است = s_x

در اینصورت بحث بصورت زیر در می‌آید :

$$\forall x(p_x \Longrightarrow q_x \vee r_x)$$
$$\forall x(q_x \Longrightarrow s_x)$$
$$\forall x(r_x \Longrightarrow s_x)$$
$$\overline{\forall x(p_x \Longrightarrow s_x)}$$

فرض کنیم مجموعه جهانی وابسته به این بحث مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است و نشان می‌دهیم که این بحث معتبر است • برای اینکار مانند بند (ج) ازروش اثبات بوسیله برهان خلف استفاده می کنیم • فرض‌کنیم که این بحث معتبر نباشد • در اینصورت ($\forall x(p_x \Longrightarrow q_x \vee r_x)$, $\forall x(q_x \Longrightarrow s_x)$ و ($\forall x(r_x \Longrightarrow s_x)$ درست هستند و ($\forall x(p_x \Longrightarrow s_x)$غلط است • در اینصورت خواهیم داشت :

(۱) چون ($\forall x(p_x \Longrightarrow s_x)$ غلط است پس $\{x|p_x \Longrightarrow s_x\} \neq \mathbb{R}$ و در نتیجه $a \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه $p_a \Longrightarrow s_a$ غلط است •

(۲) چون ($\forall x(p_x \Longrightarrow q_x \vee r_x)$ درست است پس $\{x|p_x \Longrightarrow q_x \vee r_x\} = \mathbb{R}$ وچون $a \in \mathbb{R}$ پس $q_a \Longrightarrow s_a$ درست است •

(۳) چون $\forall x(q_x \Longrightarrow s_x)$ درست است پس $\{x|q_x \Longrightarrow s_x\} = \mathbb{R}$ و چون $a \in \mathbb{R}$ پس $q_a \Longrightarrow s_a$ درست است •

(٤) چون $\forall x(r_x \Longrightarrow s_x)$ درست است پس $\{x|r_x \Longrightarrow s_x\} = \mathbb{R}$ و چون $a \in \mathbb{R}$ پس $r_a \Longrightarrow s_a$ درست است •

(۵) بنا به (۱) چون $q_a \Longrightarrow s_a$ غلط است پس s_a درست و q_a غلط است •

(٦) بنا به (۳) چون $r_a \Longrightarrow s_a$ درست است و بنا به (۵) چون s_a غلط است پس r_a غلط است •

(۷) بنا به (٤) چون $s_a \Longrightarrow r_a$ درست است و بنا به (٥) چون s_a غلط است پس r_a غلط است •

(۸) بنا به (٦) و (۷) $q_a \vee r_a$ غلط است و بنا به (۲) چون $p_a \Rightarrow q_a \vee r_a$ درست است پس p_a غلط است •

(۹) بنا به (٥) ، p_a درست است و بنا به (۸)، p_a غلط است •

نتیجه (۹) یك تناقض است • پس فرض معتبر نبودن بحث درست نیست و در نتیجه بحث معتبر است •

<u>۱۰٤۰۳ - تمرین</u>

کدامیك از بحثهای زیر معتبر است ؟

(الف)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \Longrightarrow \neg q \\ \hline \neg q \end{array}$$

(د)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Longrightarrow r \\ q \Longrightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

(ب)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Longrightarrow q \\ \hline \neg q \end{array}$$

(هـ)
$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ p \Longrightarrow \neg q \\ \hline \neg q \end{array}$$

(ج)
$$\begin{array}{l} p \wedge \neg q \\ q \Longrightarrow p \\ \hline \neg p \end{array}$$

(و)
$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \wedge \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

ز)

$$\frac{p \wedge \neg p}{q}$$

ط)

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ \neg p \Longrightarrow \neg q \\ \hline p \Longleftrightarrow q \end{array}$$

ح)

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow p \\ \hline p \Longleftrightarrow q \end{array}$$

۱۰۴۰۴ تمرین

فرض کنید p_x و q_x دو گزاره نما با مجموعه جهانی U باشند و $a \in U$.
نشان دهید که بحثهای زیر معتبرند •

(الف)

$$\frac{\neg p_a}{\neg \forall x\, p_x}$$

(ب)

$$\begin{array}{l} \forall x (p_x \Longrightarrow q_x) \\ \neg q_a \\ \hline \neg \forall x p_x \end{array}$$

(ج)

$$\begin{array}{l} \forall x\ (p_x \Longrightarrow q_x) \\ \forall x\ (\neg r_x \Longrightarrow \neg q_x) \\ \forall x\ (r_x \Longrightarrow s_x) \\ \hline \forall x (p_x \Longrightarrow s_x) \end{array}$$

۱۰۴۰۵ - قضیه

فرض کنیم که $p_1, \dots\dots, p_n$ و q گزاره باشند • در اینصورت بحث

$$\begin{array}{l} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

معتبر است اگر و فقط اگر جمله $p_1 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n \Longrightarrow q$ همیشه درست یا معتبر باشد •

<u>اثبات</u>

فرض کنیم بحث $\dfrac{\begin{matrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{matrix}}{q}$ که آنرا بحث (۱) می‌نامیم معتبر است و نشان می‌دهیم که جمله $p_1 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n \Longrightarrow q$ که آنرا جمله (۲) می نامیم معتبر است • اگر یکی از گزاره های $p_1,\ldots\ldots,p_n$ غلط باشد، آنگاه $p_1 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n$ غلط است و در نتیجه بنا به ارزش درستی $\Longrightarrow$ ، جمله (۲) درست است • اگر همه گزاره های $p_1,\ldots\ldots,p_n$ درست باشند • آنگاه چون بحث (۱) معتبر است پس درست است و در نتیجه جمله (۲) درست است • بنابراین جمله (۲) یک جمله معتبر می باشد •
برعکس فرض می کنیم که جمله (۲) معتبر است و نشان می دهیم که بحث (۱) معتبر است • اگر همه گزاره های $p_1,\ldots\ldots,p_n$ درست باشند، آنگاه $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ نیز درست است • چون جمله (۲) معتبر است پس q درست است • بنابراین بحث (۱) معتبر است •
حال با استفاده از گزاره همیشه درست $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$ نتیجه می شود که بحث (۱) معتبر است اگر وفقط اگر جمله (۲) معتبر باشد •

<u>۱۰۵ - انواع استدلالها</u>

یک اثبات جمله s با استفاده از اصول و قضایای ریاضی دانسته شده مانند $p_1,\ldots,p_k$ عبارتست از دنباله ای از گزاره ها مانند $s_1,\ldots,s_n$ که در آن $s_n=s$ (یعنی آخرین گزاره مساوی s است) و برای هر i در $\{1,\ldots,n\}$ ، s_i مساوی یکی از گزاره های $p_1,\ldots,p_k$ است یا s_i را می توان از $s_1,\ldots,s_{n-1}$ نتیجه گرفت • در حالت خاص s_1 باید یکی از گزاره های $p_1,\ldots,p_k$ باشد و s_2 باید یکی از گزاره های $p_1,\ldots,p_k$ باشد یا نتیجه ای از s_1 و الاآخره •

در این قسمت به بیان و بررسی سه نوع استدلال که در ریاضیات بطور

متداول از آنها استفاده می شود می پردازیم •

اثبات بوسیله حالات

ابتدا به بیان دو مثال می‌پردازیم :

۱۰۵۰۱ - مثال

جمله " برای هر عدد طبیعی x عدد x^2+x زوج است " را در نظر می گیریم و آنرا بطریق زیر اثبات می‌کنیم :

(۱) عدد طبیعی x یک عدد زوج یا یک عدد فرد است •

(۲) اگر x یک عدد زوج باشد آنگاه میدانیم که عدد y وجود دارد بطوریکه $x=2y$ و در نتیجه داریم :

$$x^2+x=4y^2+2y=2(2y^2+y)$$

پس x^2+x یک عدد زوج است•

(۳) اگر یک عدد فرد باشد آنگاه می‌دانیم که عدد y وجود دارد بطوریکه $x=2y-1$ و در نتیجه داریم :

$$x^2+x=4y^2-4y+1+2y-1=2(2y^2-y)$$

پس x^2+x یک عدد زوج است •

(٤) برای هر عدد طبیعی x عدد x^2+x زوج است•

در مثال فوق اگر گزاره نماهای " x یک عدد زوج است " , " x یک عدد فرد است " و " x^2+x یک عدد زوج است " را بترتیب با p_x , q_x و r_x نمایش دهیم آنگاه اثبات فوق بصورت بحث معتبر زیر در می آید :

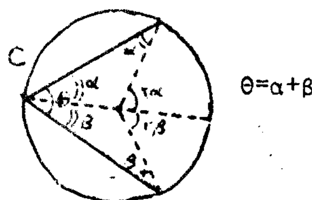
$$\forall x(p_x \vee q_x)$$
$$\forall x(p_x \Longrightarrow r_x)$$
$$\forall x(q_x \Longrightarrow r_x)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\forall x\, r_x$$

البته اثبات معتبر بودن بحث فوق را بعهده دانشجو واگذار می نمائیم . در ۱۰۵۰۱ می دانیم که مفروضات $\forall x(p_x \vee q_x)$ ، $\forall x(p_x \Longrightarrow r_x)$ و $\forall x(q_x \Longrightarrow r_x)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ درست هستند و از معتبر بودن بحث فوق نتیجه می شود که $\forall x r_x$ درست است .

۱۰۵۰۲ - مثال

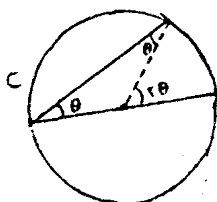
فرض کنیم θ یک زاویه محاطی دایره C باشد . جمله " اندازه θ برابر نصف اندازه کمان روبروی θ است " را در نظر می گیریم و بطریق زیر آنرا اثبات می کنیم . سه حالت را در نظر می گیریم .

(الف) مرکز دایره C داخل زاویه θ است . در اینصورت با استفاده از شکل (۱) می توان ثابت کرد که اندازه θ نصف کمان روبروی آن است .



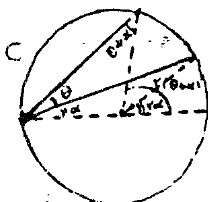
شکل (۱)

(ب) مرکز دایره C روی یکی از اضلاع زاویه θ قرار دارد . در اینصورت با توجه به شکل (۲) می توان ثابت کرد که اندازه θ نصف کمان روبروی آن است .



شکل (۲)

(ج) مرکز دایره C خارج زاویه θ است • در اینصورت با استفاده از شکل(۳) می‌توان ثابت کرد که اندازه θ نصف کمان روبروی آن است•



شکل (۳)

البته در هریك از حالات فوق از این مطلب که " اندازه زاویه محیطی در دایره C مساوی اندازه کمان روبروی آن است" بعنوان یك دانسته استفاده می‌شـــود •

حال اگر در ۱۰۶۰۱ جملات " مرکز دایره C داخل زاویه θ است " , " مرکز دایره C روی یکی از اضلاع زاویه θ است " , " مرکز دایره C خـــارج زاویه است " و " اندازه زاویه θ نصف کمان روبروی آن است " را بترتیـــب بـــا p , q , r و s نمایش دهیم , آنگاه اثبات فوق بصورت بحث معتبر زیـــر در می آیـــد •

$$\begin{array}{l} p \vee q \vee r \\ p \Longrightarrow s \\ q \Longrightarrow s \\ r \Longrightarrow s \\ \hline s \end{array}$$

مانند مثال قبل اثبات معتبر بودن بحث فوق بعهده دانشجو است • در ۱۰۶۰۱ می دانیم که مفروضات $p \vee q \vee r$ ، $p \Rightarrow s$ ، $q \Rightarrow s$ و $r \Rightarrow s$ در هندسه مسطحه اقلیدسی برقرارند و از معتبر بودن بحث فوق نتیجه می شود که برقرار است •

در اثبات ۱۰۵۰۱ و ۱۰۵۰۲ ملاحظه می‌شودکه در هریك از این‌مثالها کلیه حالتهای مختلف در رابطه با جمله ای که باید اثبات شود در نظر گرفته شده اند و سپس جمله مورد نظر در هر یك از حالتهای ممکنه اثبات شده است • بطور کلی برای اثبات هر جمله ای که لازم باشد آنرا در حالتهای مختلف ثابت کنیم، ابتدا کلیه حالتهای مختلف در رابطه با جمله مورد نظر را شناسایی می‌کنیم و سپس آن جمله را در هر یك از حالتهای ممکنه اثبات می‌کنیم • این نوع استدلال را اثبات بوسیله حالات می نامیم • بطور کلی اگر برای اثبات جمله s لازم باشد که n حالت مختلف را که با $p_1 , \ldots\ldots , p_n$ نشان می‌دهیم در نظر بگیریم ، آنگاه اثبات بوسیله حالات بصورت بحث معتبر زیر است •

$$\begin{array}{l} p_1 \vee \cdots\cdots \vee p_n \\ p_1 \Longrightarrow s \\ \quad\vdots \\ p_n \Longrightarrow s \\ \hline \quad s \end{array}$$

۱۰۵۰۳ تمرین

هریك از جملات زیر را توسط اثبات بوسیله حالات ، ثابت‌کنید •

(الف) اگر x یك عدد طبیعی باشد آنگاه $x^2 + x + 1$ یك عدد فرد است •

(ب) اگر x یك عدد حقیقی باشد آنگاه $|x| = |-x|$.

(ج) اگر x یك عدد حقیقی باشد آنگاه $|x|^2 = |x^2|$.

(د) برای هر عدد حقیقی x داریم $x \leq |x|$.

(هـ) اگر باقیمانده تقسیم عدد طبیعی x بر عدد ۲ مساوی ۱ نباشد آنگاه عدد x^2+x برعدد ۲ قابل قسمت است •
(راهنمایی : حالات مختلف را برحسب باقیمانده تقسیم عدد x بر ۲ درنظر بگیرید)•

(و) اگر x و y اعداد حقیقی باشند، آنگاه $|xy|=|x||y|$.
(راهنمائی : حالات مختلف عبارتند از:

$(x\geqslant 0 \wedge y\geqslant 0) \vee (x<0 \wedge y<0) \vee (x\geqslant 0 \wedge y<0) \vee (x<0 \wedge y\geqslant 0)$).

اثبات بوسیله مثال ناقض

ابتدا به مثال زیر توجه می‌کنیم :

۴•۵•۱ - مثال

جمله " برای هر عدد طبیعی x ، عدد $2^{2^x}+1$ یک عدد اول است " را درنظر می‌گیریم • این جمله یک جمله عمومی با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ است ومی‌دانیم در صورتی درست است که مجموعه جواب گزاره نمای " $2^{2^x}+1$ عدد اول است " مساوی $\mathbb{N}$ باشد • پس برای اثبات غلط بودن این جمله کافیست یک عدد طبیعی وجود داشته باشد بطوریکه $2^{2^n}+1$ یک عدد اول نباشد • برای عدد ۵ داریم :

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times 6700417$$

بنابراین عدد $2^{2^5}+1$ یک عدد اول نیست • اگر گزاره نمای " $2^{2^x}+1$ یک عدد اول است " را با p_x نمایش دهیم ، جمله فوق بصورت $\forall x p_x$ و بحث بالا بصورت زیر در می آید :

$\neg P_5$

$\neg \forall x p_x$

در ۱۰۴۰۴ بند (الف) ملاحظه شد که این بحث یک بحث معتبر است. در این مثال P_5 غلط است، زیرا که $2^{2^5}+1$ یک عدد اول نیست و در نتیجه جمله $\forall x p_x$ غلط است. عدد ۵ را یک مثال ناقص برای جمله عومی فوق می‌نامیم.

بطور کلی اگر p_x یک گزاره نما با مجموعه جهانی U باشد، آنگاه برای اثبات غلط بودن جمله عومی $\forall x p_x$ کافیست عنصری در U مانند a پیدا کنیم بطوریکه p_a غلط یا اینکه $\neg p_a$ درست باشد. عنصر a یک مثال ناقص برای جمله عومی $\forall x p_x$ می‌باشد. این روش اثبات را، اثبات بوسیله مثال ناقص می‌نامیم.

۱۰۵۰۵ - تمرین

با ارائه یک مثال ناقص ثابت کنید که هریک از جملات زیر غلط هستند:

(الف) برای هرعدد طبیعی x، اگر x فرد باشد، آنگاه x^2 زوج است.

(ب) برای هر عدد طبیعی x، x را می توان بصورت مجموع دو عدد اول نوشت.

(ج) اگر A، B و C سه مجموعه باشند آنگاه $A-(B-C)=(A-B)-C$.

(د) اگر A، B و C سه مجموعه باشند آنگاه $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$.

(هـ) اگر A، B و C سه مجموعه باشند آنگاه $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$.

(و) اگر A، B و C سه مجموعه باشند آنگاه $\mathcal{P}(A-B)=\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(B)$.

۱۰۵۰۶ - تمرین

فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند بطوریکه $C\neq\phi$ ، $A\subseteq C$، $B\subseteq C$ و $A\neq B$. با ارائه مثال ناقص جملات زیر را ثابت کنید. مجموعه جهانی وابسته باین

جملات ($\mathcal{P}(C)$ است .

(الف) $\neg\forall X(X \cup (A-B) = (X \cup A) - (X \cup B))$

(ب) $\neg\forall X(X -(A \cup B) = (X-A) \cup (X -B))$

اثبات بوسیله برهان خلف

یك تناقض گزاره ای است که مستقل از ارزش درستی اجزاء تشکیل دهنده آن همیشه غلط باشد . مثلاً گزاره $P \wedge \neg P$ با توجه به جدول زیر همیشه غلط است .

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
۱	۰	۰
۰	۱	۰

پس $P \wedge \neg P$ یك تناقض یا یك جمله متناقض است.

اثبات یك جمله مانند s بوسیله برهان خلف ، اثباتی است که با فرض درست بودن $\neg s$ بیك جمله متناقض مانند $p \wedge \neg p$ می رسیم که درآن p هر جمله ای است که می‌تواند , s ، یك اصل ، یا هر قضیه ای باشدکه قبلاً اثبات شده است. از این روش اثبات قبلاً در بخش ۱۰۴ استفاده شده است . برهان خلف را می‌توان بصورت بحث زیر بیان کرد :

$$\frac{\neg s \Longrightarrow p \wedge \neg p}{s}$$

در ۱۰۴۰۳ بند (و) ملاحظه شدکه بحث فوق یك بحث معتبر است . پس برای اثبات یك جمله بوسیله برهان خلف ، ابتدا فرض می‌کنیم که نفی‌آن جمله درست است و سپس با استفاده از این فرض و مطالب مربوط به آن جمله بیك تناقض میرسیم و نتیجه می‌گیریم که آن جمله درست است.اثبات بوسیله برهان خلف ،

اثبات غیر مستقیم نیز نامیده می شود • به چند مثال زیر توجه می‌کنیم •

۱۰۵۰۶ - مثال

جمله " برای هر عدد طبیعی x اگر x^2 زوج باشد آنگاه زوج است" در نظر می‌گیریم • گزاره نمای " اگر x^2 زوج باشد آنگاه x زوج است " را با p_x نمایش می‌دهیم • در اینصورت جمله فوق بصورت $\forall x p_x$ در می‌آید • میخواهیم بوسیله برهان خلف این جمله را اثبات کنیم •

(۱) فرض کنیم که این جمله غلط است • در اینصورت یك عدد طبیعی مانند a وجود دارد بطوریکه a^2 زوج است و a زوج نیست یعنی a فرد است •

(۲) چون a فرد است پس عدد طبیعی b وجود دارد بطوریکه $a=2b-1$ • در اینصورت
$$a^2 = 4b^2 - 4b + 1 = 2(2b^2 - 2b) + 1$$
و در نتیجه a^2 فرد است •

(۳) بنا به (۱), a^2 زوج است و بنا به (۲), a^2 فرد است •

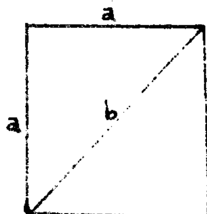
در اینصورت جمله (۳) یك تناقض است • پس جمله $\forall x p_x$ درست است• اگر جمله " a^2 زوج است " را با q نمایش دهیم آنگاه استدلال فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{\neg \forall x p_x \Longrightarrow q \wedge \neg q}{\forall x p_x}$$

۱۰۵۰۷ - مثال

جمله " نسبت اندازه ضلع یك مربع به اندازه قطر آن یك عدد کسری نیست " را در نظر می‌گیریم و آنرا با p نمایش می‌دهیم • با در نظر گرفتن شکل زیر فرض

کنیم اندازه ضلع مربع مساوی a و اندازه قطر آن مساوی b باشد ٠



درست بودن جمله p را توسط برهان خلف اثبات می‌کنیم ٠

(۱) فرض کنیم جمله p غلط است٠ در اینصورت a/b یک عدد کسری است و در نتیجه اعداد طبیعی مانند m و n وجود دارند بطوریکه $a/b = m/n$ در اینجا می‌توان فرض کردن که m و n نسبت بهم اولند ٠

(۲) بنا به قضیه فیثاغورث $a^2 + a^2 = b^2$ و در نتیجه $2a^2 = b^2$ ٠ در اینصورت $\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2}{2a^2}$ و در نتیجه $n^2 = 2m^2$ ٠ پس n^2 زوج است و بنا به ۱۰۵۰۶ , n زوج است ٠ پس عدد طبیعی k وجود دارد بطوریکه $n = 2k$ و در نتیجه $n^2 = 4k^2$ ٠ پس $4k^2 = 2m^2$ و در نتیجه $2k^2 = m^2$ ٠ بنابراین m^2 زوج است و بنا به ۱۰۵۰۶, m زوج است ٠ پس m و n دارای عامل مشترک ۲ می باشند ٠

(۳) بنا به (۱), m , n نسبت بهم اولند و بنا به (۲), m و n دارای عامل مشترک ۲ هستند ٠

در اینصورت جمله (۳) یک تناقض است ٠ پس جمله p درست است ٠ اگر جمله " m و n نسبت بهم اولند " را با q نمایش دهیم آنگاه استدلال فوق بصورت بحث زیر نوشته می شود :

$$\frac{\neg p \Longrightarrow q \wedge \neg q}{p}$$

۱۰۵۰۸ - مثال

جمله " برای هر عدد حقیقی x و هر عدد حقیقی y اگر x گویا و y اصم باشد آنگاه x + y اصم است " را در نظر می‌گیریم• اگر گزاره نمای "x یك عدد گویاست" و y یك عدد اصم است " را بترتیب با p_x و q_y نمایش دهیم آنگاه جمله فوق بصورت $\forall x \forall y \quad (p_x \wedge q_y \Longrightarrow q_{x+y})$ در می‌آید• بوسیله برهان خلف این جمله را اثبات می‌کنیم•

(۱) فرض کنیم که جمله غلط باشد • در اینصورت اعداد حقیقی a و b وجود دارند بطوریکه a گویا, b اصم و a+b گویا است•

(۲) چون a و a + b اعداد گویا هستند پس اعداد صحیح i , j , m و n وجود دارند بطوریکه $a=i/j$ و $a+b=m/n$ در اینصورت $b= m/n-a$ و در نتیجه $b=m/n - i/j= \frac{mj-ni}{nj}$ چون $mj - ni$ و nj اعداد صحیح هستند پس b یك عدد گویاست •

(۳) بنا به (۱), b اصم است و بنا به (۲), b گویاست •

جمله (۳) یك تناقض است و در نتیجه جمله $\forall x \forall y \ (p_x \wedge q_x \Longrightarrow q_{x+y})$ درست است• استدلال فوق را می‌توان بصورت بحث زیر نوشت :

$$\frac{\neg \forall x \forall y (p_x \wedge q_y \Longrightarrow q_{x+y}) \Longrightarrow q_b \wedge \neg q_b}{\forall x \forall y \ (p_x \wedge q_y \Longrightarrow q_{x+y})}$$

۱۰۵۰۹ - تمرین

بوسیله برهان خلف جملات زیر را اثبات کنید :

(الف) اگر A یك مجموعه باشد آنگاه $\phi - A = \phi$ •

(ب) گزاره $(p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s) \Longrightarrow (p \Longrightarrow (q \Longrightarrow (r \Longrightarrow s)))$ همیشه درست است•

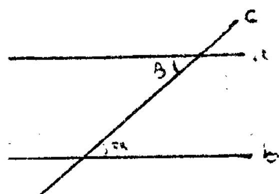
(ج) $\sqrt{2}$ یك عدد اًم است•

(د) برای هر عدد حقیقی x , عدد $\sqrt{2} - x$ اصم است یا عدد $\sqrt{2} + x$ اصم است •

(هـ) برای هر عدد طبیعی x , عدد طبیعی و زوج y وجود دارد بطوریکه $y > x$ •

(و) برای هر عدد طبیعی x , عدد طبیعی و فرد y وجود دارد بطوریکه $y > x$ •

(ز) در یك صفحه اقلیدسی دو خط a و b و مورب c را که در شکل زیر نشان داده شده اند , در نظر بگیرید •



اگر زاویه α مساوی زاویه β باشد , آنگاه دو خط a و b یکدیگر را قطع نمی کنند یا بعبارت دیگر موازیند • برای اثبات این جمله می توانید از جمله " مجموع زوایای داخلی یك مثلث مساوی ۱۸۰ درجه است " استفاده کنید •

۱۰٦ - استقرا ریاضی

در این قسمت یکی از روشهای مهم استدلال را که روش اثبات بوسیله استقرا ریاضی نامیده می شود , بیان می‌کنیم • در بخش ۱۰۵ , دیدیم که هریك از روشهای اثباتی که بیان گردید , بستگی به مجموعه جهانی وابسته به جمله مورد نظر

ندارند • ولی اثبات بوسیله استقرا ریاضی فقط برای اثبات جمله های عمومی که به آنها مجموعه جهانی $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ یا مجموعه جهانی مناسبی وابسته است بکار برده می شود •

جمله عمومی $\forall n p_n$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}_0$ را در نظر می‌گیریم • مطابق روش اثبات بوسیله استقرا ریاضی جملات زیر را ثابت می‌کنیم •

$$(۱) \quad p_0$$
$$(۲) \quad \forall n (p_n \Longrightarrow p_{n+1})$$

و از اثبات جملات (۱) و (۲) جمله $\forall n p_n$ نتیجه گرفته می شود • بعبارت دیگر بنا به روش اثبات بوسیله استقرا ریاضی بحث زیر یك بحث معتبر است •

$$\frac{\begin{array}{l} p_0 \\ \forall n (p_n \Longrightarrow p_{n+1}) \end{array}}{\forall n p_n}$$

p_0 را پایه استقرا و $\forall n (p \Longrightarrow p_{n+1})$ را گام استقرا می‌نامیم • معتبر بودن بحث فوق را می‌توان بطور شهودی بصورت زیر شرح داد :

<u>توضیح :</u>

فرض کنید که پایه استقرا و گام استقرا یعنی p_0 و $\forall n (p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ را اثبات کرده ایم • چون گام استقرا درست است پس مجموعه جواب گزاره نمای $p_n \Longrightarrow p_{n+1}$ مساوی $\mathbb{N}_0$ است • پس گزاره زیر درست است :

$$p_0 \Longrightarrow p_1$$

چون پایه استقرا یعنی p_0 درست است پس بنا به ارزش درستی $\Longrightarrow$ ، p_1 درست است • بطریق مشابه گزاره زیر درست است :

$$p_1 \Longrightarrow p_2$$

و چون p_1 درست است پس p_2 درست است • با ادامه این بحث نتیجه می شود که برای هر n ، p_n درست است•

۱۰٦۰۱ - مثال

جمله عمومی $\forall n\,(2^n > 2n - 1)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}_0$ را در نظر می‌گیریم • گزاره نمای $2^n > 2n - 1$ را با p_n نمایش می‌دهیم و جمله $\forall n p_n$ را بوسیله استقرا ریاضی اثبات می کنیم • برای اینکار نشان می دهیم که p_0 و $\forall n\,(p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ درست هستند •

پایه استقـرا

چون $2^0 = 1 > -1 = 2 \times 0 - 1$ پس n درست است•

گام استقـرا

فرض کنیم $2^n > 2n - 1$ برای عدد طبیعی دلخواه n درست است•نشان می دهیم که $2^{n+1} > 2(n+1) - 1$ نیز درست است• می دانیم که برای هر k در $\mathbb{N}$ داریم $2^k \geq 2$ • بطرف چپ نا معادله $2^n > 2n - 1$ عدد 2^n و بطرف راست آن عدد ۲ را اضافه می کنیم • در اینصورت داریم :

$$2^n + 2^n > (2n - 1) + 2$$

یا

$$2 \times 2^n = 2^{n+1} > 2(n+1) - 1$$

بنابراین برای هر n با فرض p_n ، p_{n+1} نتیجه شد • پس جمله $\forall n(p_n \Rightarrow p_{n+1})$ درست است • پس $\forall n p_n$ درست است •

۱۰۶۰۲ - مثال

جمله ($\forall n(1+2+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2})$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}_0$ را در نظر می گیریم و آنرا با $\forall n p_n$ نمایش می‌دهیم • این جمله را توسط استقرا ریاضی اثبات می کنیم •

پایه استقرا

روشن است که $\frac{0(0+1)}{2}=0$ پس p_0 درست است •

گام استقرا

برای عدد طبیعی دلخواه n فرض کنیم p_n درست است و نشان می‌دهیم که p_{n+1} درست است • به طرفین معادله p_n عدد $n+1$ را اضافه می‌کنیم • در اینصورت داریم :

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$$

پس p_{n+1} درست است• بنابراین جمله $\forall n(p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ درست است • پس $\forall n\, p_n$ درست است •

استقرا ریاضی با پایه صفر

بحث معتبر زیر را که برای اثبات جملات ۱۰۶۰۱ و ۱۰۶۰۲ بکار برده شد استقرا ریاضی با پایه صفر می نامیم •

$$\begin{array}{l} p_0 \\ \forall n(p_n \Longrightarrow p_{n+1}) \\ \hline \forall n p_n \end{array}$$

استقرا ریاضی با پایه m

ممکن است اتفاق بیافتد که یک گزاره نما مانند p_n بازاء چند عدد طبیعی غلط باشد ولی بازاء همه اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی عدد معینی مانند m درست باشد • در چنین حالتی برای اثبات جمله عومی $\forall n \geqslant m\ (p_n)$ که درآن m عدد طبیعی معینی است , ابتدا ثابت می کنیم که جمله p_m درست است و سپس نشان می دهیم که جمله $\forall n \geqslant m\ (p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ درست است • این بحث را بصورت خلاصه زیر می نویسیم :

$$\frac{\begin{array}{l} p_m \\ \forall n \geqslant m\ (p_n \Longrightarrow p_{n+1}) \end{array}}{\forall n \geqslant m\ (p_n)}$$

بحث معتبر فوق استقرا ریاضی با پایه m نامیده می شود • در این بحث p_m پایه استقرا و $\forall n \geqslant m\ (p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ گام استقرا نامیده می شود • به مثالهای زیر توجه می کنیم •

۲•۶•۱ - مثال

گزاره نمای $2^n > 2n+1$ را در نظر میگیریم و آنرا با p_n نمایش می دهیم • ملاحظه می شودکه این گزاره نما بازاء $n=0$, $n=1$ و $n=2$ غلط است , یعنی p_0 , p_1 و p_2 غلط هستند • ولی بوسیله استقرا می توان ثابت کردکه جمله $\forall n \geqslant 3\ (p_n)$ درست است • اینکار را در زیر انجام می دهیم •

پایه استقرا

بازاء $n=3$ داریم $2^3 = 8 > 7 = 2\times 3+1$ • پس p_3 درست است •

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد دلخواه $n \geqslant 3$, p_n درست است • نشان

می‌دهیم که P_{n+1} درست است • برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌دانیم که $2^k \geqslant 2$ • حال 2^n و ۲ را بترتیب بطرف چپ و بطرف راست نامعادله P_n می‌افزاییم • در اینصورت داریم :

$$2^n + 2^n > 2n + 1 + 2$$

یا

$$2^{n+1} > 2(n+1) + 1$$

پس P_{n+1} درست است و در نتیجه جمله $\forall n \geqslant 3\ (P_n \Longrightarrow P_{n+1})$ درست• بنابراین جمله $\forall n \geqslant 3\ (P_n)$ درست است • توجه می کنیم که استقرا بکار برده شده در این مثال استقرا با پایه ۳ است•

۱۰۶۰۴ - مثال

گزاره نمای $2^n > n^2$ را در نظر می‌گیریم و آنرا با P_n نشان می‌دهیم• در اینصورت داریم :

بازاء $n = 0$ ، P_n درست است ، زیرا که $0^2 = 0 < 1 = 2^0$

بازاء $n = 1$ ، P_n درست است ، زیرا که $1^2 = 1 < 2 = 2^1$

بازاء $n = 2$ ، P_n غلط است ، زیرا که $2^2 = 4 \not< 4 = 2^2$

بازاء $n = 3$ ، P_n غلط است ، زیرا که $3^2 = 9 \not< 8 = 2^3$

بازاء $n = 4$ ، P_n غلط است ، زیرا که $4^2 = 16 \not< 16 = 2^4$

بازاء $n = 5$ ، P_n درست است ، زیراکه $5^2 = 25 < 32 = 2^5$

بازاء $n = 6$ ، P_n درست است ، زیراکه $6^2 = 36 < 64 = 2^6$

بنظر می آید که گزاره نمای P_n بازاء هر عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی 5 درست است.

در واقع بوسیله استقرا ریاضی نشان می‌دهیم که جمله $\forall n \geq 0 \; (2^n > n^2)$ درست است •

<u>پایه استقرا</u>

در بالا دیدیم که p_0 درست است •

<u>گام استقرا</u>

برای عدد طبیعی دلخواه $n \geq 0$ فرض می کنیم که p_n یعنی نامعادله $n^2 < 2^n$ درست باشد • نشان می دهیم که p_{n+1} یعنی نامعادله $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ درست است • بنا به ۱۰۶۰۳، برای هر $n \geq 3$ ، $2^n > 2n+1$ • حال 2^n را بطرف چپ و $2n+1$ را بطرف راست نامعادله p_n می افزائیم • در اینصورت داریم : $2^n + 2^n > n^2 + 2n + 1$

یا $2^{n+1} > (n+1)^2$

پس p_{n+1} درست است و در نتیجه جمله $\forall n \geq 0 \; (p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ درست است • بنابراین جمله $\forall n \geq 0 \; (p_n)$ درست است • ملاحظه می کنیم که استقرا بکاربرده شده در این مثال یك استقرا با پایه ۰ است •

<u>۱۰۶۰۵ - مثال</u>

جمله " برای هر n ، مجموعه توان هر مجموعه با n عنصر دارای 2^n عنصر است " را در نظر می‌گیریم • این جمله را توسط استقرا ثابت می کنیم • گزاره‌نمای " مجموعه توان هر مجموعه با n عنصر دارای 2^n عنصر است " را با p_n نمایش می دهیم •

پایه استقرا

اگر $n = 0$ و مجموعه مثلاً A دارای صفر عنصر باشد یعنی عنصر نداشته باشد آنگاه $A = \Phi$ و در اینصورت $\mathcal{P}(A) = \{\Phi\}$ و در نتیجه $\mathcal{P}(A)$ دارای $2^0 = 1$ عنصر است • پس p_0 درست است •

گام استقرا

فرض کنیم که p_n درست باشد یعنی مجموعه توان هر مجموعه با n عنصر دارای 2^n عنصر است• نشان می دهیم که p_{n+1} درست است • برای اینکار فرض کنیم A یك مجموعه با $n+1$ عنصر باشد و نشان می‌دهیم که $\mathcal{P}(A)$ دارای 2^{n+1} عنصر است •

چون $n \in \mathbb{N}_0$ و A دارای $n+1$ عنصر است پس $A \neq \Phi$ • فرض کنیم $a \in A$. مجموعه $B = A - \{a\}$ را در نظر می گیریم • در اینصورت روشن است که B دارای n عنصر است و در نتیجه $\mathcal{P}(B)$ دارای 2^n عنصر می‌باشد • مجموعه C را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$C = \{y \mid \exists X (X \in \mathcal{P}(B) \wedge y = X \cup \{a\})\}$$

یا

$$C = \{ X \cup \{a\} , X \in \mathcal{P}(B)\}$$

در اینصورت بازاء هر $X \in \mathcal{P}(B)$, $y = X \cup \{a\}$ یك عنصر C است و برعکس بازاء هر $y \in C$ بنا به تعریف C , $X \in \mathcal{P}(B)$ وجود دارد بطوریکه $y = X \cup \{a\}$ •

پس نتیجه می شود که تعداد عناصر C مساوی تعداد عناصر $\mathcal{P}(B)$ یعنی 2^n است • از تساوی $B = A - \{a\}$ نتیجه می‌شود که $A = B \cup \{a\}$ • حال نشان می دهیم که $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup C$ • فرض کنیم $y \in \mathcal{P}(A)$, یعنی $y \subseteq A$ •

در اینصورت $a \in y$ یا $a \notin y$ • اگر $a \notin y$ آنگاه $y \subseteq B$ یعنی $y \in \mathcal{P}(B)$ و در نتیجه $y \in \mathcal{P}(B) \cup C$ • اگر $a \in y$ آنگاه $x = y - \{a\} \subseteq B$ و بنا به تعریف C داریم $y = x \cup \{a\} \in C$ و در نتیجه $y \in \mathcal{P}(B) \cup C$ • حال فرض کنیم $y \in \mathcal{P}(B) \cup C$ • در اینصورت $y \in \mathcal{P}(B)$ یا $y \in C$ • اگر $y \in \mathcal{P}(B)$ آنگاه $y \subseteq B$ و در نتیجه $y \subseteq A$ یعنی $y \in \mathcal{P}(A)$ • اگر $y \in C$ آنگاه $x \in \mathcal{P}(B)$ وجود دارد بطوریکه $y = x \cup \{a\}$ • چون $x \subseteq B$ پس $x \subseteq A$ و چون $\{a\} \subseteq A$ پس $y = x \cup \{a\} \subseteq A$ و در نتیجه $y \in \mathcal{P}(A)$ • بنابراین $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup C$ •

همچنین نشان می دهیم که $\mathcal{P}(B) \cap C = \Phi$ • این مطلب را با استفاده از برهان خلف ثابت می کنیم • فرض کنیم $\mathcal{P}(B) \cap C \neq \Phi$ و $y \in \mathcal{P}(B) \cap C$ • در اینصورت $y \in \mathcal{P}(B)$ و $y \in C$ • پس $y \subseteq B$ و وجود دارد $x \subseteq B$ بطوریکه $y = x \cup \{a\}$ در اینصورت $x \cup \{a\} \subseteq B$ و در نتیجه $a \in B$ • از طرف دیگر بنا به تعریف B داریم $a \notin B$ • حاصل یک تناقض است • پس $\mathcal{P}(B) \cap C = \Phi$ • بنابراین تعداد عناصر $\mathcal{P}(B) \cup C$ مساوی مجموع تعداد عناصر $\mathcal{P}(B)$ وتعداد عناصر C است ، یعنی $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ • بنابراین تعداد عناصر $\mathcal{P}(A)$ مساوی 2^{n+1} است • پس جمله $\forall n (p_n \Longrightarrow p_{n+1})$ درست است • بنابراین جمله $\forall n p_n$ درست است• ملاحظه می شود که استقرا بکار برده شده در این مثال یک استقرا با پایه ۰ است•

۱۰۶۰۶ - تمرین

هریک از جملات زیر را توسط استقرا ثابت کنید •

(الف) $\forall n \geqslant 1 \ (2^n > n)$

(ب) $\forall n \ (2n \leqslant 2^n)$

(ج) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند آنگاه

$$\forall n \geqslant 1 (a < b \Longrightarrow a^n < b^n)$$

(د) اگر r یک عدد حقیقی باشد بطوریکه $r \neq 1$ آنگاه

$$\forall n \geqslant 1 \left(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$$

(هـ) $$\forall n \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

(و) برای هر n عدد $n^2 + n$ بر عدد ۲ قابل قسمت است.

(ز) اگر q و p_k برای هر $k \in \mathbb{N}_0$ گزاره باشند آنگاه

$$\forall n \left((p_0 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q \Longleftrightarrow (p_0 \vee q) \wedge \dots \wedge (p_n \vee q) \right)$$

(ح) اگر p ، q و p_k برای هر $k \in \mathbb{N}_0$ گزاره باشند آنگاه بحث زیر یک بحث معتبر است :

$$\begin{array}{c} p \Longleftrightarrow p_0 \\ p_0 \Longleftrightarrow p_1 \\ \vdots \\ p_n \Longleftrightarrow q \\ \hline p \Longleftrightarrow q \end{array}$$

۱۰۷ - شرط لازم و کافی

در قضایای ریاضی از عبارات " شرط لازم و کافی " یا " اگر و فقط اگر" که معنی هر دو عبارت یکسان است , مکرراً استفاده می شود . در این قسمت به بیان نحوه اثبات این گونه قضایا می پردازیم و سه طرز اثبات را شرح می دهیم . در ۱•۴•۳ بند های (ح) و (ط) ملاحظه شد که بحثهای زیر معتبرند :

$$\frac{\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow p \end{array}}{p \Longleftrightarrow q} \qquad (1)$$

و

$$\frac{\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ \neg p \Longrightarrow \neg q \end{array}}{p \Longleftrightarrow q} \qquad (2)$$

و همچنین در ۱۰۶۰۶ بند (ح) ملاحظه شد که بحث زیر نیز معتبر است:

$$\frac{\begin{array}{l} p \Longleftrightarrow p_0 \\ p_0 \Longleftrightarrow p_1 \\ \quad \vdots \\ p_n \Longleftrightarrow q \end{array}}{p \Longleftrightarrow q} \qquad (3)$$

بنابراین برای اثبات جمله $p \Longleftrightarrow q$ می‌توان از هر یك از روشهای (۱)، (۲) یا (۳) که در بالا ذکر شد، استفاده نمود.

۱۰۷۰۱ - مثال

فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه، مجموعه U باشند. نشان می‌دهیم که شرط لازم و کافی برای اینکه $A \subseteq B$ این است که $B' \subseteq A'$. یعنی نشان می‌دهیم که $A \subseteq B \Longleftrightarrow B' \subseteq A'$. اینکار را با استفاده از بحث (۱) انجام می‌دهیم.

ابتدا نشان می‌دهیم که $A \subseteq B \Longrightarrow B' \subseteq A'$. فرض کنیم $x \in B'$. در اینصورت $x \notin B$. چون $A \subseteq B$ پس $x \notin A$ و در نتیجه $x \in A'$. بنابراین $B' \subseteq A'$.

حال نشان می‌دهیم که $B' \subseteq A' \Longrightarrow A \subseteq B$. فرض کنیم $x \in A$. در اینصورت $x \notin A'$. چون $B' \subseteq A'$ پس $x \notin B'$ و در نتیجه $x \in B$. بنابراین $A \subseteq B$.

۱۰۷۰۲ - مثال

فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد • نشان می‌دهیم که n زوج است اگر و فقط اگر n^2 زوج باشد • یعنی نشان می‌دهیم که , n^2 زوج است $\Longleftrightarrow$ n زوج است • اینکار را با استفاده از بحث (۲) انجام می‌دهیم •

ابتدا نشان می‌دهیم که n^2 زوج است $\Longrightarrow$ n زوج است • چون n زوج است پس عدد طبیعی k وجود دارد بطوریکه $n=2k$ • در اینصورت $n^2=4k^2=2(2k^2)$ و در نتیجه n^2 زوج است •

حال نشان می‌دهیم که (n^2 زوج است) $\neg \Longrightarrow$ (n زوج است) $\neg$ • چون n زوج نیست پس n فرد است و در نتیجه عدد طبیعی k وجود دارد بطوریکه $n=2k-1$ • در اینصورت $n^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$ و در نتیجه n^2 فرد است یعنی n^2 زوج نیست •

۱۰۷۰۳ - مثال

نشان می‌دهیم که گزاره $\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$ یک گزاره همیشه درست است • برای اینکار از بحث (۳) استفاده می‌کنیم • بدین صورت که نشان می‌دهیم گزاره های $\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$ و $\neg(\neg p \vee q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$ همیشه درست هستند و در نتیجه بحث بصورت زیر خواهد بود :

$$\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$$

$$\neg(\neg p \vee q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

حال اثبات معتبر بودن گزاره های بالای خط بحث فوق بعهده دانشجو

واگذار می شود •

۱۰۷۰٤ - تمرین

جملات زیر را اثبات کنید :

(الف) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد • در اینصورت n فرد است اگر وفقط اگر n^2 فرد باشد •

(ب) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد • در اینصورت n فرد است اگر وفقط اگر n+1 زوج باشد •

(ج) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد • در اینصورت n زوج است اگر وفقط اگر n+۲ زوج باشد •

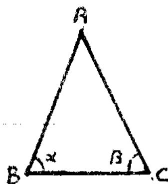
(د) اگر p_{xy} یک گزاره نمای دو متغیره با مجموعه جهانی U باشد آنگاه جمله زیر معتبر است :

$$\exists x \exists y (p_{xy}) \Longleftrightarrow \exists y \exists x (p_{xy})$$

(هـ) اگر مجموعه جهانی , مجموعه اعداد حقیقی باشد آنگاه جمله زیرمعتبراست:

$$\forall x \quad (x>0 \Longleftrightarrow |x| = x \quad)$$

(و) اگر مثلث زیر را در نظر بگیریم آنگاه AB = AC اگر و فقط اگر زاویه α مساوی زاویه β باشد •



۱۰۸ - وجود داشتن ویکتائی

فرض کنیم p_x یک گزاره نما با مجموعه جهانی U باشد • جملات زیر را در نظر می گیریم :

" یك x یکتا وجود دارد بطوریکه p_x "

" یك x منحصر بفرد وجود دارد بطوریکه p_x "

" یك و فقط یك x وجود دارد بطوریکه p_x "

هر سه جمله فوق دارای معنی یکسان هستند و در قضایای زیر بکار برده می شوند. برای نمایش این جملات از نماد $\exists! x p_x$ استفاده می شودکه در آن نماد " ! " دال بر منحصر بفرد بودن x است.

اثبات جمله $\exists! x p_x$ شامل دو مرحله زیر است :

(الف) <u>مرحله وجودی</u> در این مرحله ثابت می کنیم که یك x وجود دارد بطوریکه در p_x صدق می‌کند . بعبارت دیگر جمله $\exists x\, p_x$ را ثابت می‌کنیم .

(ب) <u>مرحله یکتایی</u> در این مرحله ثابت می‌کنیم که برای هر x و برای هر y اگر x و y در p_x صدق کنند، آنگاه x = y . بعبارت دیگر جمله زیر را ثابت می‌کنیم :

$$\forall x \forall y (p_x \wedge p_y) \Longrightarrow x = y$$

<u>۱۰۸۰۱ - مثال</u>

جمله " یك x یکتا وجود دارد بطوریکه برای هر y داریم $x + y = y + x = y$ " با مجموعه جهانی $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم . بعبارت دیگر جمله $\exists! x \forall y \ (x + y = y + x = y)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{R}$ را در نظر می گیریم . این جمله را در زیر اثبات می کنیم .

<u>مرحله وجودی</u>

بازاء $x = 0$ می‌دانیم که برای هر y داریم $0 + y = y + 0 = y$ پس

ثابت کردیم که یك x وجود دارد بطوریکه برای هر y داریم $x + y = y + x = y$
یعنی جمله زیر را ثابت کردیم :

$$\exists x \forall y \; (x + y = y + x = y)$$

مرحله یکتایی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند بطوریکه برای هر y داریم :

$$a + y = y + a = y \qquad (۱)$$

و

$$b + y = y + b = y \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم که $a = b$ • در تساویهای (۱) و (۲) بجای y بترتیب b و a را
قرار می‌دهیم • در اینصورت خواهیم داشت :

$$a + b = b + a = b$$

و

$$b + a = a + b = a$$

بنابراین $a = b$ • در اینجا اثبات جمله فوق تکمیل می‌شود •

۲•۸•۱۰ـ مثال

فرض کنیم A یك مجموعه باشد • جمله " یك x یکتا وجود دارد بطوریکه
برای هر y داریم $x \cup y = y \cup x = y$ "، با مجموعه جهانی $\mathcal{P}(A)$ را در نظر
می‌گیریم بعبارت دیگر جمله $\exists! x \, \forall y \; (x \cup y = y \cup x = y)$ با مجموعه
جهانی $\mathcal{P}(A)$ را در نظر می‌گیریم و این جمله را در زیر اثبات می‌کنیم •

مرحله وجودی

بازاء $x = \Phi$ می‌دانیم که برای هر y داریم $\Phi \cup y = y \cup \Phi = y$

پس جمله زیر را ثابت کردیم :

$$\exists X \ \forall y (X \cup y = y \cup X = y)$$

مرحله یکتایی

فرض کنیم B و C دو عنصر $\mathcal{P}(A)$ باشند بطوریکه برای هر y داریم :

$$B \cup y = y \cup B = y \qquad (1)$$

و

$$C \cup y = y \cup C = y \qquad (2)$$

نشان می‌دهیم که $B = C$ • در تساویهای (۱) و (۲) بجای y بترتیب C و B را قرار می‌دهیم • در اینصورت خواهیم داشت :

$$B \cup C = C \cup B = C$$

و

$$C \cup B = B \cup C = B$$

بنابراین $B = C$ • در اینجا اثبات جمله فوق تکمیل می‌شود •

۱۰۸۰۳ – تمرین

جملات زیر را ثابت کنید •

(الف) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه جهانی باشد آنگاه یک x منحصر بفردی وجود دارد بطوری که برای هر y داریم $xy = yx = y$

(ب) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه جهانی باشد آنگاه برای هر x یک y یکتایی وجود دارد بطوریکه $x+y=y+x=0$

(ج) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه جهانی باشد آنگاه برای هر x یک y یکتایی وجود دارد بطوریکه اگر $x \neq 0$ آنگاه $xy=yx=1$.

(د) فرض کنید A یک مجموعه باشد • اگر $\mathcal{P}(A)$ مجموعه جهانی باشد آنگاه یک X منحصر بفردی وجود دارد بطوریکه برای هر y داریم $X \cap y = y \cap X = y$.

(هـ) فرض کنید A یک مجموعه باشد • اگر $P(A)$ مجموعه جهانی باشد آنگـــاه برای هر X یک و فقط یک y وجود دارد بطوریکه $A = X \cup Y = Y \cup X$ •

فصل ۲

روابط

در این فصل یکی از مفاهیم مهم در نظریه مجموعه ها را معرفی می‌کنیم وبه بررسی برخی از خواص آن می‌پردازیم • مفهوم رابطه نه تنها در اکثر شاخه های ریاضی بکاربرده می شود , بلکه در زندگی روزمره نیز ممکن است بکار رود • مثلاً وقتی می‌گوئیم " حسن‌برادر حسین است " آنگاه درك می‌شودکه حسن و حسین توسط رابطه " برادر بودن " بهم مربوط می شوند • همچنین وقتی‌می‌گوئیم " محمد پدر مهدی است " آنگاه درك می‌کنیم که محمد و مهدی توسط رابطه " پدر بودن " بهم مربوط هستند • قبل از تعریف رابطه و معرفی برخی از خواص‌آن , ابتدا زوج مرتب و ضرب دکارتی مجموعه ها را تعریف می‌کنیم •

<u>۱ - ۲ : ضرب دکارتی مجموعه ها</u>

بنا به تعریف تساوی دو مجموعه داریم {۱ و ۲} = {۲ و ۱} • پس ترتیب قرار گرفتن عناصر دو مجموعه دخالتی در تساوی آن دو مجموعه ندارد • در اینجا میخواهیم زوج (۲و ۱) را طوری تعریف کنیم که ترتیب قرار گرفتن عناصر در تساوی دخالت داشته باشد و در نتیجه (۱و۲) ≠ (۲و۱)• بطور کلی می‌خواهیم زوج (x,y) را طوری تعریف کنیم که داشته باشیم :

$$(x,y) = (u,v) \iff x=u \wedge y=v$$

<u>۱ - ۱ - ۲ : تعریف</u> زوج (x,y) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

۲-۱-۲ : قضیه

$(x,y) = (u,v)$ اگر و فقط اگر $x=u$, $y=v$.

اثبات

فرض کنیم $x=u$, $y=v$ و نشان می دهیم $(x,y)=(u,v)$. از تساویهای $x=u$ و $y=v$ نتیجه می شود که $\{x\}=\{u\}$ و $\{x,y\}=\{u,v\}$ • پس $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$ و در نتیجه $(x,y)=(u,v)$.

حال فرض کنیم $(x,y)=(u,v)$ و نشان می دهیم $x=u$, $y=v$ • چون $(x,y)=(u,v)$ پس $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$ در اینصورت داریم :

$\{u\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$, $\{u,v\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$

بنابراین داریم :

(الف) $\{u\} = \{x\}$ یا (ب) $\{u\}=\{x,y\}$

و

(ج) $\{u,v\} = \{x\}$ یا (د) $\{u,v\} = \{x,y\}$

اگر تساوی (ب) برقرار باشد آنگاه $u=x=y$ • در اینصورت تساویهای (ج) و (د) یکسان می شوند و نتیجه می شود که $x=y=u=v$ و در اینصورت قضیه اثبات می شود
بطریق مشابه اگر تساوی (ج) برقرار باشد آنگاه نتیجه می شود که $x=y=u=v$ وقضیه ثابت می شود • پس فقط حالتی باقی می ماند که تساویهای (الف) و (د) برقرار باشند • از تساوی (الف) داریم $u=x$ و از تساوی (د) نتیجه می شود که $u=y$ یا $v=y$ • اگر $u=y$ آنگاه $x=y=u$ و مانند حالت قبل قضیه ثابت می شود • اگر $v=y$, آنگاه نتیجه مطلوب بدست می آید وقضیه اثبات می شود •

۲-۱-۳ : تعریف

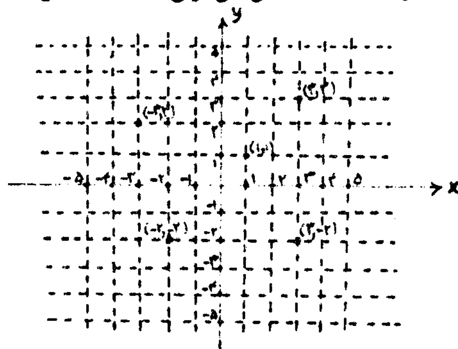
زوج (x,y) را که در ۲-۱-۱ تعریف شد یک زوج مرتب می نامیم • x را مختص اول یا مؤلفه اول و y را مختص دوم یا مؤلفه دوم زوج مرتب (x,y) می نامیم •

۲-۱-۴ : تمرین نشان دهید که اگر تعریف کنیم $(x,y)=\{x,\{y\}\}$, آنگاه با این تعریف

۲-۱-۲ را نمی‌توان اثبات کرد • برای اینکار یک مثال ناقض ارائه دهید •

<u>۲-۱-۵ : مثال</u>

دستگاه مختصات دکارتی در صفحه را در نظر می‌گیریم • همانطوریکه ملاحظه می‌شود به ازاء هرنقطه در این دستگاه مختصات می‌توان یک زوج مرتب با مؤلفه های حقیقی وابسته کرد • و برعکس بازاء هر زوج مرتب با مؤلفه های حقیقی می‌توان یک نقطه در دستگاه مختصات وابسته نمود •



<u>۲-۱-٦ : تمرین</u>

فرض کنید A یک مجموعه باشد • در اینصورت اگر $x,y \in A$ آنگاه $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

<u>۲-۱-۷ : تعریف</u>

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • در اینصورت ضرب دکارتی A و B بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A \wedge b\in B\}$$

بعبارت دیگر $A\times B$ مجموعه همه زوجهای مرتب (a,b) است که درآن مؤلفه اول آنها a متعلق به A و مؤلفه دوم آنها b متعلق به B می‌باشد •

<u>۲-۱-۸ : مثال</u> اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,5\}$ آنگاه داریم :

$$A\times B=\{(a,1),(a,5),(b,1),(b,5),(c,1),(c,5)\}$$

<u>۲-۱-۹ : تعریف</u> اگر A یک مجموعه باشد آنگاه A^2 را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A^2=A\times A$$

۱۰-۱-۲ : مثال

مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم . در اینصورت همانطوری که در ۵-۱-۲ ملاحظه شد بین عناصر $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و نقاط در یک دستگاه مختصات دکارتی در صفحه یک تناظر یک بیک وجود دارد . بدین معنی که بازاء هر زوج مرتب (a,b) در R^2 یک نقطه در دستگاه مختصات دکارتی در صفحه وابسته می‌شود و برعکس بازاء هر نقطه در دستگاه مختصات یک زوج مرتب در $\mathbb{R}^2$ وابسته می‌شود .

۱۱-۱-۲ : تمرین

۱- مجموعه های A، B، وC را در نظر بگیرید . نشان دهید که :

(الف) $\Phi\times A = A\times\Phi = \Phi$

(ب) $(A\times B=A\times C \wedge A \neq \Phi) \implies B=C$

(ج) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(د) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(هـ) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

(و) اگر $\mathcal{B}$ مجموعه ای از مجموعه ها باشد , آنگاه $A\times\bigcup\mathcal{B} = \bigcup\{A\times y \mid y\in\mathcal{B}\}$

۲- نشان دهید که هریک از تساویهای زیر غلط هستند . (یک مثال ناقض برای هریک ارائه دهید) .

(الف) $A\times B = B\times A$

(ب) $A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$

۳- تحت چه شرایطی $A\times B = B\times A$ درست است . بعبارت دیگر یک شرط لازم‌کافی بیابید که تساوی $A\times B = B\times A$ برقرار باشد . در این تمرین فرض کنید :

$A \neq \Phi$, $B \neq \Phi$.

۱۲-۱-۲ : تعریف

سه تایی مرتب (x_1, x_2, x_3) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3)$$

چهارتایی مرتب (x_4 ، x_3 ، x_2 ، x_1) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = ((x_1,x_2,x_3),x_4)$$

بطورکلی تایی مرتب ($x_1,\ldots\ldots,x_n$) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x_1,\ldots\ldots,x_n) = ((x_1,\ldots\ldots,x_{n-1}),x_n)$$

<u>تذکر:</u>

تعریف ۲-۱-۱۲ با استفاده از استقرار ریاضی انجام شده است و به این نوع تعریف ، تعریف بازگشتی گفته می‌شود • در ۲-۱-۱۲ اگر n یک عدد طبیعی باشد بطوریکه $n \geq 2$ آنگاه برای تعریف n- تایی مرتب ($x_1,\ldots\ldots\ldots,x_n$) بصورت زیر عمل شد :

(الف) بازاء $n=2$ ، $(x_1 , x_2) = \{\{x_1\} , \{x_1 , x_2\}\}$

(ب) $(x_1,\ldots\ldots,x_n) = ((x_1,\ldots\ldots\ldots,x_{n-1}),x_n)$

تعریف فوق را می‌توان برای $n=1$ بصورت $(x_1) = x_1$ نیز انجام داد و در نتیجه بازاء هر عدد طبیعی n, n- تایی مرتب $(x_1,\ldots,x_n)$ تعریف می‌شود •

مثال دیگری از یک تعریف بازگشتی ، تعریف جمع اعداد است• بدین صورت که برای هر عدد طبیعی n و اعداد حقیقی $a_1,\ldots\ldots,a_n$ مجموع $a_1,\ldots,a_n$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

(الف) $$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$$

(ب) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n$$

تعریف بازگشتی را می‌توان بطوراجمالی به اینصورت بیان کرد که ابتدا قدم اول تعریف می‌شود و سپس بعدی بر حسب قبلی تعریف می‌گردد •

<u>۱۳-۱-۲ :</u> قضیه برای هر عدد طبیعی n داریم :

$$(x_1,\ldots\ldots x_n) = (y_1,\ldots\ldots,y_n) \Longleftrightarrow x_1=y_1 \wedge \cdots\cdots \wedge x_n=y_n$$

<u>اثبات :</u> توسط استقرا این قضیه را اثبات می‌کنیم •

<u>پایه استقرا</u>: اگر $n=1$ آنگاه بنابه تذکر بعد از ۲-۱-۱۲ داریم:

$$(x_1)=(y_1) \Longleftrightarrow x_1=y_1$$

<u>گام استقرا</u>: فرض‌کنیم قضیه برای عدد طبیعی n برقرار باشد و برای $n+1$ قضیه را اثبات می‌کنیم.

بنابه ۲-۱-۱۲ :

$$(x_1,\dots x_{n+1})=(y_1,\dots,y_{n+1}) \Longleftrightarrow ((x_1,\dots,x_n),x_{n+1})=((y_1,\dots,y_n),y_{n+1})$$

بنا به ۲-۱-۲ :

$$((x_1,\dots,x_n),x_{n+1})=((y_1,\dots,y_n),y_{n+1}) \Longleftrightarrow (x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n) \wedge x_{n+1}=y_{n+1}$$

بنا به فرض :

$$(x_1,\dots,x_x)=(y_1,\dots,y_n) \wedge x_{n+1}=y_{n+1} \Longleftrightarrow (x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_n=y_n) \wedge x_{n+1}=y_{n+1}$$

بنابراین :

$$(x_1,\dots,x_{n+1})=(y_1,\dots,y_{n+1}) \Longleftrightarrow x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_{n+1}=y_{n+1}$$

<u>۲-۱-۱۴ : تعریف</u> برای هر عدد طبیعی n و مجموعه های $A_1,\dots,A_n$ ضرب دکارتی $A_1,\dots,A_n$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A_1\times\dots\times A_n=\{(a_1,\dots,a_n)\,|\,a_1\in A_1 \wedge\dots\wedge a_n\in A_n\}$$

$A_1\times\dots\times A_n$ را با نماد $\prod_{i=1}^{n} A_i$ نیز نمایش می‌دهیم.

تذکر: اگر C,B,A سه مجموعه باشد آنگاه ,

$$A\times B\times C = (A\times B)\times C$$

زیراکه داریم :

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)\,|\,a\in A\wedge b\in B\wedge c\in C\}$$
$$=\{((a,b),c)\,|\,a\in A\wedge b\in B\wedge c\in C\}$$

و

$$(A\times B)\times C=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in B\}\times C=\{((a,b),c)\,|\,a\in A\wedge b\in B\wedge c\in C\}$$

پس تساوی فوق برقرار است• ولی توجه کنیدکه مثال زیر نشان می‌دهد که بطور عمومـــی تساوی زیر برقرار نیست •

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$$

<u>۲-۱-۱۵ : مثال</u> : فرض کنیم $A=\{1\}$ ، $B=\{2\}$ و $C=\{3\}$. در اینصورت داریم :

$$(A\times B)\times C=\{(1,2)\}\times\{3\}=\{((1,2),3)\}$$

و

$$A\times(B\times C)=\{1\}\times\{(2,3)\}=\{(1,(2,3))\}$$

چون $((1,2),3)\neq(1,(2,3))$ پس $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$

<u>۲-۱-۱۶ : تمرین</u> فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند • نشان دهیدکه :

(الف) اگر $A\neq B$ آنگاه داریم :

$$A\times B=B\times A \iff A=\phi \vee B=\phi$$

(ب)

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C) \iff A=\phi \vee B=\phi \vee C=\phi$$

(ج)

$$A\times B=\phi \iff A=\phi \vee B=\phi$$

<u>۲-۱-۱۷ : تعریف</u> : اگر A یك مجموعه و n یك عدد طبیعی باشد آنگاه A^n را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A^n=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{n\text{-مرتبه}}$$

بعبارت دیگر :

$$A^n=\{(a_1,\ldots,a_n)\mid a_1,\ldots,a_n\in A\}$$

در اینجا توجه کنید که $a_1,\ldots,a_n\in A$ خلاصه شده $a_1\in A\wedge\ldots\wedge a_n\in A$ است •

<u>۲-۱-۱۸ : تمرین</u> : فرض کنید A و B دو مجموعه و n یك عدد طبیعی باشد • نشـــان دهیدکـــه :

(الف) $A^n=B^n \iff A=B$

(ب) $A^n=\phi \iff A=\phi$

۲-۲ : رابطه

همانطوریکه در ابتدای این فصل گفته شد مفهوم رابطه نه تنها در اکثر شاخه‌های ریاضی بلکه در زندگی روزمره نیز بکار برده می‌شود • در این قسمت برخی از مفاهیم اصلی را در مورد رابطه معرفی می‌کنیم و در دو فصل بعدی روابط خاصی را مورد بررسی قرار خواهیم داد •

۱-۲-۲ : تعریف

یك رابطه (یا یك رابطه دوتایی) مجموعه ای از زوجهای مرتب است ، یعنی مجموعه R یك رابطه است اگر و فقط اگر داشته باشیم :

$$\forall x(x \in R \Longrightarrow \exists y\ \exists z(x=(y,z)))$$

اگر R یك رابطه باشد و $(x,y) \in R$ ، آنگاه می‌نویسیم xRy

۲-۲-۲ : مثال : هر یك از مجموعه های زیر یك رابطه است

(الف) $R=\{(a,b),(1,2),(1,a)\}$

(ب) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1\}$

(ج) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2 \leq 1\}$

(د) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \wedge x<y\}$

(هـ) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \wedge y=2x\}$

۳-۲-۲ : تمرین : کدامیك از جملات زیر درست و کدامیك غلط است ؟

(الف) Φ یك رابطه است •

(ب) مجموعه $A=\{1,a,\Phi,\{\Phi\}\}$ یك رابطه است•

(ج) مجموعه $A=\{1,(x,y),\Phi,(a,b)\}$ یك رابطه است•

(د) مجموعه $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یك رابطه است•

۳-۲-۲ : تعریف :

اگر n یك عدد طبیعی باشد آنگاه مجموعه R یك‌رابطه n- تایی است اگر هر عنصر R یك n- تایی‌مرتب باشد , بعبارت دیگر R یك رابطه n- تایی است اگر و فقط اگر داشته باشیم :

$$\forall x(x \in R \Longrightarrow \exists y_1 \exists y_2 \cdots\cdots \exists y_n(x=(y_1,\ldots,y_n)))$$

٤-۲-۲ : مثال :

(الف) مجموعه $R=\{(a,1,3),(1,b,2)\}$ یك رابطه سه تایی‌است•

(ب) مجموعه $R=\{(x,y,z)\mid x,y,z \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2+z^2=1\}$ یك رابطه سه تایی است •

(ج) $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یك رابطه چهارتایی است •

تذکر: در اینجا ما روابط دوتایی را در نظر می‌گیریم و آنهارا مورد بررسی قرارمی‌دهیم• همانطوریکه در ۱-۲-۲, تعریف شد یك رابطه دوتایی را بطور خلاصه یك رابطه می‌نامیم بنابراین از این ببعد منظور از یك رابطه , یك رابطه دوتایی خواهدبود •

۵-۲-۲ : تعریف: فرض کنیم R یك رابطه باشد •

(الف) حوزه تعریف , قلمرو یا دامنه R که آنرا با dom R نمایش می‌دهیم , عبارتست از :

$$\text{dom } R=\{x \mid \exists y((x,y) \in R)\}$$

بعبارت دیگر دامنه R مجموعه همه مؤلفه اول هریك از عناصر R می‌باشد •

(ب) حوزه مقادیر یا برد R که آنرا با ran R نشان می‌دهیم , عبارتست از :

$$\text{ran } R=\{y \mid \exists x((x,y) \in R)\}$$

بعبارت دیگر برد R مجموعه همه مؤلفه دوم هریك از عناصر R می‌باشد •

(ج) میدان R که آنرا با fld R نمایش می‌دهیم , عبارتست از:

$$\text{fld } R=\text{dom } R \cup \text{ran } R$$

بعبارت دیگر میدان R مجموعه همه مؤلفه اول و دوم هریك از عناصر R می‌باشد •

٦-٢-٢ : مثال :

در زیر دامنه ، برد و میدان هریك از روابط ٢-٢-٢ را تعیین می‌کنیم•

الف) $dom\ R=\{a,1\}$, $ran\ R=\{b,2,a\}$, $fld\ R=\{a,b,1,2\}$

ب)
$$dom\ R=\{x|x \in \mathbb{R} \wedge \exists y(y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1)\}$$
$$ran\ R=\{y|y \in \mathbb{R} \wedge \exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1)\}$$

در این مثال ملاحظه می‌شودکه $domR=ran\ R$ و در نتیجه داریم :
$$fld\ R=dom\ R \cup ran\ R = dom\ R = ran\ R$$

ج)
$$dom\ R=\{x|x \in \mathbb{R} \wedge \exists y(y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2\leq1)\}$$
$$ran\ R=\{y|y \in \mathbb{R} \wedge \exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2\leq1)\}$$

در این مثال نیز داریم $dom\ R=ran\ R$ و در نتیجه $fld\ R=dom\ R=ran\ R$

د)
$$dom\ R=\{x|x \in \mathbb{N} \wedge \exists y(y \in \mathbb{N} \wedge x<y)\}$$

در اینصورت $dom\ R=\mathbb{N}$ ، زیرا که برای هر $x \in \mathbb{N}$ داریم $x+1 \in \mathbb{N}$ و $x < x+1$ و در نتیجه $x \in dom\ R$.

$$ran\ R=\{y|y \in \mathbb{N} \wedge \exists x(x \in \mathbb{N} \wedge x < y)\}$$

در اینصورت $ran\ R=\mathbb{N}-\{1\}$ زیرا که برای هر $y \in \mathbb{N}-\{1\}$ یعنی برای هر $y \in \mathbb{N}$ و $y>1$ داریم $y-1 \in \mathbb{N}$ و $y-1<y$ ودرنتیجه $y \in ran\ R$. حال چون $ran\ R \subseteq dom\ R$ پس $fld\ R=dom\ R$ •

هـ)
$$dom\ R=\{x|x \in \mathbb{N} \wedge \exists y(y \in \mathbb{N} \wedge y=2x)\}$$

در اینصورت $dom\ R=\mathbb{N}$ ، زیرا که برای هر $x \in \mathbb{N}$ داریم $2x \in \mathbb{N}$ و $(x,2x) \in R$ و در نتیجه $x \in dom\ R$.

$$ran\ R=\{y|y \in \mathbb{N} \wedge \exists x(x \in \mathbb{N} \wedge y=2x)\}$$

در اینصورت $ran\ R$ مساوی مجموعه همه اعداد طبیعی و زوج است ، یعنی
$$ran\ R=\{2x|x \in \mathbb{N}\}$$

زیراکه اگر $y \in ran\ R$ آنگاه $x \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $y=2x$ و در نتیجه

و $x \in \mathbb{N}$ برای یك $y=2x$ آنگاه $y \in \{2x | x \in \mathbb{N}\}$ و برعکس اگر $y \in \{2x | x \in \mathbb{N}\}$

در نتیجه $(x,y) \in R$ ، یعنی $y \in ran\ R$ •

در این مثال نیز چون $ran\ R \subseteq dom\ R$ پس $fld\ R = dom\ R$ •

۲-۲-۷ : تمرین :

باتوجه به ۲-۲-۶ مثالهای (ب) و (ج) نشان دهیدکه دامنه و برد هریك از این دو رابطه مساوی مجموعه زیر است :

$$[-1,1] = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$

۲-۲-۸ : تمرین :

نشان دهیدکه مجموعه R یك رابطه است اگر و فقط اگر $R \subseteq dom R \times ran\ R$.

۲-۲-۹ : تعریف :

اگر A و B دو مجموعه باشند و $R \subseteq A \times B$ ، آنگاه R یك رابطه از A به B نامیده می شود • درحالت خاص اگر $A=B$ ، یعنی $R \subseteq A \times A$ آنگاه R را یك رابطه روی A می ناميم •

۲-۲-۱۰ : تمرین :

فرض کنیدA و B دو مجموعه و R یك رابطه باشد • در اینصورت نشان دهیدکه R یك رابطه از A به B است اگر و فقط اگر $dom\ R \subseteq A$ و $ran\ R \subseteq B$ •

۲-۲-۱۱ : مثال :

(الف) اگر $A = \{a ,۳ ,۱\}$ و $B = \{0 ,\Phi\}$ ، آنگاه $R = \{(a, 0), (۳, 0)\}$ يك رابطه از A به B است • همچنین $S = \{(a, 0), (a,\Phi), (۳ ,\Phi)\}$ یك رابطه از A به B است •

(ب) رابطه $R = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{Z} \wedge (x-y$ مضربی از ۲ است$)\}$ یك رابطه از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ یا یك رابطه روی $\mathbb{Z}$ است •

(ج) رابطه $\mathbb{R}^2$ یك رابطه از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ یا یك رابطه روی $\mathbb{R}$ است.

۲-۲-۱۲ : تعریف :

اگر R یك رابطه باشد آنگاه معکوس R که با نماد R^{-1} نمایش داده می‌شود، یک رابطه است که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$$

۲-۲-۱۳ : مثال :

(الف) اگر $R=\{(a,b),(2,1),(c,2)\}$ آنگاه $R^{-1}=\{(b,a),(1,2),(2,c)\}$

(ب) اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(x<y)\}$

آنگاه $R^{-1}=\{(y,x)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(x<y)\}$

یا $R^{-1}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(x>y)\}$

(ج) اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(x=y)\}$

آنگاه $R^{-1}=\{(y,x)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(y=x)\}$

یا $R^{-1}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(x=y)\}$

در این مثال ملاحظه می‌شود که $R=R^{-1}$ روابطی که با معکوسشان مساوی باشند روابط خاصی هستند که در فصل ٤ در مورد آنها صحبت خواهیم کرد.

۲-۲-۱۴ : تمرین :

دامنه، بُرد و معکوس هریك از روابط زیر را تعیین کنید :

(الف) $R=\{(a,1),(a,\phi),(\phi,\{\phi\}),(5,0),(0,5)\}$

(ب) $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge(y=x^2)\}$

(ج) $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\wedge(y=|x|)\}$

(د) $R=\{(x,y)\mid x,y\in$ ـ $\wedge$ ($x-y$ مضربی از ۱ است)$\}$

۲-۲-۱۵ : تمرین : با فرض اینکه R و S دو رابطه هستند، هریك از تساویهای زیر را

ثابت کنیـــد •

الف) $\operatorname{ran} R^{-1} = \operatorname{dom} R \quad , \quad \operatorname{dom} R^{-1} = \operatorname{ran} R$

ب) $(R^{-1})^{-1} = R$

ج) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad , \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

۱۶-۲-۲ : تعریف :

رابطه R و مجموعه A را در نظر می‌گیریم • در اینصورت تحدید یا تقیید R روی A رابطه ای است که با نماد $R|A$ نمایش داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$R|A = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \wedge x \in A\}$$

بعبارت دیگر $R|A$ مجموعه همه زوجهای مرتب در R است که مؤلفه اول آنهادر A قرار دارنــد •

۱۷-۲-۲ : مثال :

(الف) اگر $R = \{(1,2), (\phi,2), (0,5) (1,1)\} \quad , \quad A = \{1,5,0,3\}$ آنگاه داریم :

$$R|A = \{(1,2), (1,1), (0,5)\}$$

(ب) اگر $R = \{(x,y) \mid x,y \in \text{ـ} \wedge (y=|x|)\} \quad , \quad A = \mathbb{N}$, آنگاه داریم :

$$R|A = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \text{ـ} \wedge (y=|x|)\}$$

یا

$$R|A = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \wedge (y=x)\}$$

۱۸-۲-۲ : تمرین :

در هریك از بند های زیر تحدید رابطه R روی مجموعه A را بیابید •

(الف) $R = \{(1,1), (5,5), (1,5), (a,6)\} \quad , \quad A = \{1,6,0,a\}$.

(ب) $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge (x=y)\} \quad , \quad A = \mathbb{N}$.

(ج) $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge (xy=1)\} \quad , \quad A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$.

۱۹-۲-۲ : قضیه :

فرض کنیم R یک رابطه و A یک مجموعه باشد . در اینصورت داریم :

(الف) $\text{dom } R|A=(\text{dom } R)\cap A$.

(ب) $\text{ran } R|A \subseteq \text{ran } R$.

(ج) $R|A=R\cap(A\times \text{ran } R)$.

اثبات (الف) بنا به ۵-۲-۲ (الف) :

$x\in \text{dom } R|A \Longleftrightarrow \exists y((x,y)\in R|A)$

بنابه ۱۶-۲-۲ : $\Longleftrightarrow \exists y((x,y)\in R\wedge x\in A)$

بنا به ۵-۲-۲ (الف) : $\Longleftrightarrow x\in \text{dom } R\wedge x\in A$

بنا به تعریف اشتراک دو مجموعه : $\Longleftrightarrow x\in(\text{dom}R)\cap A$

پس : $\text{dom } R|A=(\text{dom}R)\cap A$

(ب) بنا به ۵-۲-۲(ب) :

$y\in \text{ran } R|A \Longrightarrow \exists x((x,y)\in R|A)$

بنا به ۱۶-۲-۲ :

$\Longrightarrow \exists x((x,y)\in R\wedge x\in A)$

بنا به ۵-۲-۲ (ب)

$\Longrightarrow x\in \text{ran } R$

پس $\text{ran } R|A\subseteq \text{ran } R$.

(ج) بنا به ۱۶-۲-۲ : $(x,y)\in R|A \Longleftrightarrow (x,y)\in R\wedge x\in A$

بنا به ۵-۲-۲ (ب) :

$\Longleftrightarrow (x,y)\in R\wedge x\in A\wedge y\in \text{ran } R$

بنابه ۷-۱-۲ : $\Longleftrightarrow (x,y)\in R\wedge(x,y)\in A\times \text{ran } R$

بنا به تعریف اشتراک دو مجموعه

$\Longleftrightarrow (x,y)\in R\cap(A\times \text{ran } R)$

پس $R|A=R\cap(A\times \text{ran } R)$.

۲۰-۲-۲ : تمرین :

فرض کنید R یك رابطه و A و B دو مجموعه باشند • نشان دهیدکه :

الف) $R|(A \cup B)=(R|A) \cup (R|B)$

ب) $R|(A \cap B)=(R|A) \cap (R|B)$

ج) $\Phi|A = \Phi$

د) $R|\Phi = \Phi$

۲۱-۲-۲ : تعریف :

رابطه R و مجموعه A را در نظر می‌گیریم • مجموعه تصویر A تحت R که با نماد $R[A]$ نمایش داده می‌شود , عبارتست از :

$$R[A]=\{y|\ \exists x(x \in A \wedge (x,y) \in R)\}$$

بعبارت دیگر $R[A]$ مجموعه همه مؤلفه دوم همه زوجهای مرتب در R است که مؤلفه اول آنها در A باشد •

۲۲-۲-۲ : مثال :

(الف) اگر $R=\{(1,2),(2,3),(\Phi,\{\Phi\}),(1,1)\}$ و $A=\{1,\Phi,0\}$, آنگاه داریم :

$$R[A]=\{2,1,\{\Phi\}\}$$

(ب) اگر $R=\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R} \wedge (y=2x)\}$ و $A=\mathbb{N}$, آنگاه داریم :

$R[A]=\{y|y \in \mathbb{N} \wedge ($ y یك عدد زوج است $)\}$

۲۳-۲-۲ : تمرین :

فرض کنید R یك رابطه و A و B دو مجموعه باشند • در اینصورت نشان دهیدکه :

الف) $R[A]=\text{ran}\ (R|A)$

ب) $R[A \cup B]=R[A] \cup R[B]$

ج) $R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$ و مثال ناقض برای تساوی $R[A\cap B]=R[A]\cap R[B]$ ارائه دهید •

د) $R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$ و مثال ناقض برای تساوی $R[A]-R[B]=R[A-B]$ ارائه دهید •

هـ) $A\subseteq B \Longrightarrow R[A]\subseteq R[B]$

و) $\Phi[A]=\Phi$

ز) $R[\Phi]=\Phi$

۲-۲-۲۴ : تعریف :

فرض کنیم R و S دو رابطه باشند • ترکیب R با S که با نماد RoS نشان داده می شود ، رابطه ای است که بصورت زیر تعریف می شود :

$$RoS=\{(x,z)\mid \exists y((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)\}$$

۲-۲-۲۵ : مثال :

(الف) اگر $R=\{(1,2),(\phi,5),(\{\phi\},2)\}$, $S=\{(a,\{\phi\}),(\{\phi\},\phi)\}$ آنگاه داریم :

$$RoS=\{(a,2),(\{\phi\},5)\}$$

و

$$SoR=\phi$$

در این مثال ملاحظه می شود که $RoS\neq SoR$ و در نتیجه در حالت عمومی تساوی RoS=SoR برقرار نیست •

(ب) اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge$, $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge(y=x^2)\}$ آنگاه داریم :

$$RoS=\{(x,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\wedge\exists y(y\in\mathbb{R}\wedge(x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)\}$$

یا

$$RoS=\{(x,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\wedge\exists y(y\in\mathbb{R}\wedge y=x^2\wedge z=2y)\}$$

یا

$$RoS=\{(x,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\wedge(z=2x^2)\}$$

همچنین

$$SoR=\{(x,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\wedge\exists y(y\in\mathbb{R}\wedge(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S)\}$$

یا

$$SoR=\{(x,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\wedge\exists y(y\in\mathbb{R}\wedge y=2x\wedge z=y^2)\}$$

یا

$$S\circ R=\{(x,z)\mid x,z\in \mathbb{R}\wedge (z=4x^2)\}$$

۲-۲-۲۶ : تمرین :

در هریك از بند های زیر $R\circ S$ و $S\circ R$ را تعیین کنید •

الف) $R=\{(1,1),(1,2),(a,3)\}$ ، $S=\{(1,6),(3,1)\}$.

ب) $R=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbb{R}\wedge (y=|x|)\}$, $S=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbb{R}\wedge (y=x^{۳})\}$.

ج) $R=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbb{R}\wedge (y=x)\}$, $S=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbb{R}\wedge (y\neq x)\}$.

۲-۲-۲۷ : تمرین :

فرض کنید R,S و T سه رابطه باشند • ثابت کنید که :

الف) $R\circ S\subseteq \operatorname{dom} S\times \operatorname{ran} R$

( ) $R\circ S\neq \Phi \Longleftrightarrow \operatorname{dom} R\cap \operatorname{ran} S\neq \Phi$

ج) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

د) $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$

هـ) $R\circ(S\cap T)\subseteq (R\circ S)\cap(R\circ T)$ ومثال ناقض برای تساوی $R\circ(S\cap T)=(R\circ S)\cap(R\circ T)$ ارائه دهیـــد •

و) $(R\cap S)\circ T\subseteq (R\circ T)\cap(S\circ T)$ ومثال ناقض برای تساوی $(R\cap S)\circ T=(R\circ T)\cap(S\circ T)$ ارائه دهید •

۲-۲-۲۸ : قضیه : اگر R,S و T سه رابطه باشند آنگاه داریم :

$$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$$

اثبات : با استفاده از ۲-۲-۲۴ داریم :

$$(x,z)\in (R\circ S)\circ T \Longleftrightarrow \exists y((x,y)\in T\wedge (y,z)\in R\circ S)$$
$$\Longleftrightarrow \exists y\,\exists u((x,y)\in T\wedge (y,u)\in S\wedge (u,z)\in R)$$
$$\Longleftrightarrow \exists u((x,u)\in S\circ T\wedge (u,z)\in R)$$

$\Leftarrow \Rightarrow (x,z) \in Ro(SoT)$

پس $(RoS)oT=Ro(SoT)$.

۲-۲-۲۹ : تمرین :

فرض کنید R و S دو رابطه و A یک مجموعه باشد • ثابت‌کنیدکه :

(الف) $(RoS)^{-1}=S^{-1}oR^{-1}$

(ب) $(RoS)|A=Ro(S|A)$

(ج) $R\subseteq S \Longrightarrow RoT\subseteq SoT \wedge ToR\subseteq ToS$

(د) $(RoS)[A]=R[S[A]]$

(هـ) $dom\ (RoS)=S^{-1}[dom\ R]$

(و) $ran\ (RoS)=R[ran\ S]$

۲-۲-۳۰ : تعریف :

فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد • در اینصورت به هر رابطه روی A می‌توان جدولی بصورت زیر وابسته کرد • فرض کنیم R یک رابطه روی A باشد ، یعنی $R\subseteq A\times A$ در اینصورت جدول R را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم •

ابتدا عناصر مجموعه A را بترتیب در سطر و ستون اول جدول می‌نویسیم • سپس برای هر i و j در $\{1,\dots,n\}$ در مربع وابسته به a_i و a_j برحسب اینکه $(a_i,a_j)\in R$ یا $(a_i,a_j)\notin R$ بترتیب ۱ یا ۰ قرار می‌دهیم و بدین صورت جدول را تکمیل می‌کنیم •

R	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1						
a_2						
⋮						
a_i				▢		
⋮						
a_n						

مربع وابسته به a_j,a_i

در فصل ٤ خواهیم دید که جدول روابط خاص شکل هندسی جالبی پیدا می‌کنند و بسبب آن تشخیص این نوع روابط خاص از روی جدول آنها بسیار ساده می‌شود •

۲-۲-۳۱ : مثال :

مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ و روابط زیر روی A را ، در نظر می‌گیریم :

$R_1=\{(b,b),(a,b),(b,a),(b,e),(e,b)\}$

$R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,e),(e,b)\}$

$R_3=\{(a,c),(c,e),(a,e)\}$

$R_4=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$

حال با استفاده از ۲-۲-۳۰ جدول هریك از روابط فوق را تشکیل می‌دهیم •

R_1	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	1	1	0	0	1
c	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0
e	0	1	0	0	0

R_2	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	0	1	0	1
d	0	0	0	1	0
e	0	1	0	0	1

R_3	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	1
b	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1
d	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0

R_4	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	0	1	0	0
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

۲-۲-۳۲ : تمرین :

مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ را درنظر بگیرید و جدول هریك از روابط زیر روی A را تشکیل دهیــد .

(الف) $R=\{(a,a),(a,c),(c,d),(a,d)\}$

(ب) $S=\{(b,b),(b,c),(c,b)\}$

(ج) $T=\{(a,d),(d,a),(a,b),(d,b)\}$

۲-۲-۳۳ : تمرین :

مجموعه $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$ را در نظر بگیرید و جدول رابطه زیر روی A را تشکیل دهید .

$R=\{(x,y) \mid x,y \in A \wedge (x+y)<14\}$

حال به سوالات زیر در مورد R پاسخ دهید :

(الف) آیا برای هر $x \in A$ ، $(x,x) \in R$ ؟

(ب) آیا برای هر $x,y \in A$ اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R$ ؟

(ج) آیا برای هر $x,y,z \in A$ اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ آنگاه $(x,z) \in R$ ؟

فصل ۳

توابع

در این فصل رابطه خاصی را بنام تابع معرفی می‌کنیم و برخی از خواص مهم آنرا بررسی می‌نماییم • مفهوم تابع نقش بسیار مهمی در کلیه شاخه های ریاضی دارد • در فصول بعدی برخی ازکاربرد های تابع را خواهیم دید •

۱-۳ : مفاهیم اولیه :

در این قسمت تابع را تعریف می‌کنیم و برخی از مفاهیم اولیه آنرا بررسی می‌نمائیم •

۱-۱-۳ : تعریف :

رابطه F یك تابع است اگر برای هر $x \in dom F$ یك y یکتا در $ran F$ وجود داشته باشد بطوریکه xFy. بعبارت دیگر رابطه F یك تابع است اگر و فقط اگر داشته باشیم :

$$\forall x \forall y \forall z \,(xFy \wedge xFz \implies y = z)$$

در مبحث توابع معمولاً بجای xFy می نویسیم $y=F(x)$ و می گوئیم y مقدار تابع F در x است• پس با این نمادگذاری رابطه F یك تابع است اگر و فقط اگر داشته باشیم :

$$\forall x \forall y \,(x=y \implies F(x) = F(y))$$

۲-۱-۳ : مثال :

(الف) رابطه $F = \{(1,2),(3,4),(5,2)\}$ یك تابع است ، زیرا که ملاحظه می شود ، برای هر $x \in dom F$ فقط و فقط یك $y \in ran F$ وجود دارد بطوریکه $(x,y) \in F$ یا $y=F(x)$.

(ب) رابطه $F=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\wedge(y=x^2)\}$ یك تابع است ، زیرا که داریم :

$$(x,y)\in F\wedge(x,z)\in F \Longrightarrow y=x^2\wedge z=x^2 \Longrightarrow y=z$$

(ج) رابطه $R=\{(1,2),(0,2),(1,4)\}$ یك تابع نیست ، زیرا که ملاحظه می شود $(1,2)\in R$ و $(1,4)\in R$ و $2\neq 4$ ۰

(د) رابطه $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\wedge(x^2+y^2=1)\}$ یك تابع نیست ، زیرا که

$$(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2})\in R \text{ و } (\tfrac{1}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2})\in R \text{ و } \tfrac{\sqrt{3}}{2}\neq-\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

نمادگذاری :

معمولاً توابع را با حروف کوچك الفبای لاتین مانند f، g، h،... نشان می دهند ۰ ما نیز در اینجا از این نماد ها برای نمایش توابع استفاده خواهیم کرد ۰

۳-۱-۳ : تمرین :

کدامیك از روابط زیر یك تابع است :

(الف) $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\wedge(y=|x|)\}$

(ب) $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(y=x)\}$

(ج) $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{N}\wedge(x<y)\}$

(د) $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x\geqslant 0(y=\sqrt{x})\}$

۳-۱-٤ : تعریف :

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند ۰ در اینصورت f یك تابع از A به B است، اگر

(الف) $f\subseteq A\times B$

(ب) $dom f=A$

(ج) f یك تابع باشد ۰

اگر f یك تابع از A به B باشد آنگاه می نویسیم $f:A\to B$ بطور خلاصه :

$$(f:A\to B)\Leftrightarrow(f\subseteq A\times B\wedge dom f=A\wedge\forall x\forall y(x=y\Rightarrow f(x)=f(y))$$

اگر f یك تابع از A به A باشد آنگاه می گوئیم f یك تابع روی A است ۰

۵-۱-۳ : مثال :

(الف) تابع $f=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\land(y=x^2)\}$ را می‌توان بصورت زیر نشان داد :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=x^2$$

(ب) فرض کنیم A یك مجموعه باشد . تعریف می‌کنیم :

$$i_A : A\longrightarrow A$$
$$i_A(x)=x$$

در اینصورت i_A تابع همانی روی مجموعه A نامیده می شود .

(ج) فرض کنیم A و B دو مجموعه و b عنصر معینی در B باشد . تعریف می‌کنیم :

$$f : A\longrightarrow B$$
$$f(x)=b$$

در اینصورت f را یك تابع ثابت از A به B با مقدار ثابت b می‌نامیم .

۶-۱-۳ : قضیه :

فرض کنیم f و g دو تابع باشند . در اینصورت $f=g$ اگر و فقط اگر $dom\, f = dom\, g$ و برای هر x داشته باشیم $f(x)=g(x)$

اثبات : اگر $f=g$ آنگاه روشن است که $dom\, f = dom\, g$ و بعلاوه برای هر x داریم :

$$(x,y)\in f \Longleftrightarrow (x,y)\in g$$

بعبارت دیگر برای هر x داریم :

$$y=f(x)\Longleftrightarrow y=g(x)$$

یعنی برای هر x داریم $f(x)=g(x)$.

حال فرض کنیم $dom\, f = dom\, g$ و برای هر x داریم $f(x)=g(x)$ نشان می‌دهیم که $f=g$.

بنا به ۵-۲-۲ (الف) : $(x,y)\in f\Rightarrow x\in dom\, f$

بنا به فرض $dom\, f = dom\, g$: $\Rightarrow x\in dom\, g$

بنا به ۵-۲-۲ (الف) : $\Longrightarrow \exists z((x,z)\in g)$

چون $(x,y)\in f$ پس $y=f(x)$ و چون $(x,z)\in g$ پس $z=g(x)$ بنا به فرض $f(x)=g(x)$ برای هر x و در نتیجه $y=z$. بنابراین $(x,y)\in g$. بطریق مشابه اگر $(x,y)\in g$ آنگاه $(x,y)\in f$.

بنابراین $f=g$ ∙

۷-۱-۳ : مثال

تابع $f=\{(1,2),(2,0),(3,2)\}$ را در نظر می‌گیریم ∙ بنابه ۱۲-۲-۲ معکوس f بعنوان یك رابطه عبارتست از $f^{-1}=\{(2,1),(0,2),(2,3)\}$. ملاحظه می‌شود که f^{-1} یك تابع نیست، زیرا که $(2,1)\in f^{-1}$ و $(2,3)\in f^{-1}$ و $3\neq 1$ ∙ بنابراین معکوس یك تابع بعنوان یك رابطه در حالت عومی یك تابع نیست ∙ در قسمت بعدی این فصل یك شرط لازم و کافی برای اینکه معکوس یك تابع، یك تابع باشد، خواهیم یافت ∙

۸-۱-۳ : قضیه :

اگر f و g دوتابع باشند، آنگاه $f\circ g$ نیزیك تابع است ∙ بعلاوه $dom(f\circ g)\subseteq dom\, g$ و $ran(f\circ g)\subseteq ran\, f$ ویك شرط لازم وکافی برای اینکه تساوی $dom(f\circ g)=dom\, g$ برقرار باشد این است که $ran\, g\subseteq dom\, f$ ∙

اثبات :

می دانیم که $f\circ g$ یك رابطه است ∙ برای اینکه ثابت کنیم $f\circ g$ یك تابع است باید نشان دهیم که برای هر x، z و z' اگر $(x,z)\in f\circ g$، $(x,z')\in f\circ g$ آنگاه $z=z'$. چون $(x,z)\in f\circ g$ پس y وجود دارد بطوریکه :

$$(y,z)\in f \quad و \quad (x,y)\in g$$

چون $(x,z')\in f\circ g$ پس y' وجود دارد بطوریکه :

$$(y',z')\in f \quad و \quad (x,y')\in g$$

چون g یك تابع است و $(x,y)\in g$ و $(x,y')\in g$ پس $y=y'$. همچنین چون f یك تابع است و $(y,z)\in f$ و $(y',z')\in f$ و $y=y'$ پس $z=z'$ ∙ بنابراین $f\circ g$ یك تابع است ∙

نشان می‌دهیم

$$dom(f\circ g)\subseteq dom\, g$$

بنابه ۵-۲-۲ (الف) :

$$x\in dom(f\circ g)\Rightarrow \exists z((x,z)\in f\circ g)$$

بنابه ۲۴-۲-۲ :

$$\Longrightarrow \exists z\, \exists y((x,y)\in g\wedge (y,z)\in f)$$

بنا به ۵-۲-۲ (الف): $\Rightarrow x \in dom\, g$

پس $dom(f \circ g) \subseteq dom\, g$.

همچنین نشان می‌دهیم $ran(f \circ g) \subseteq ran\, f$.

بنا به ۵-۲-۲ (ب): $z_0 \in ran(f \circ g) \Rightarrow \exists x((x, z) \in f \circ g)$

بنا به ۲۴-۲-۲: $\Rightarrow \exists x \exists y((x, y) \in g \wedge (x, z) \in f)$

بنا به ۵-۲-۲ (ب): $\Rightarrow z \in ran\, f$

پس $ran(f \circ g) \subseteq ran\, f$.

حال نشان می‌دهیم که $dom(f \circ g) = dom\, g$ اگر و فقط اگر $ran\, g \subseteq dom\, f$.

فرض کنیم $dom(f \circ g) = dom\, g$ و نشان می‌دهیم که $ran\, g \subseteq dom\, f$.

بنا به ۵-۲-۲ (ب): $y \in ran\, g \Rightarrow \exists x((x, y) \in g)$

بنا به ۵-۲-۲ (الف): $\Rightarrow x \in dom\, g$

بنا به فرض $dom(f \circ g) = dom\, g$: $\Rightarrow x \in dom(f \circ g)$

بنا به ۵-۲-۲ (الف): $\Rightarrow \exists z((x, z) \in f \circ g)$

بنا به ۲۴-۲-۲: $\Rightarrow \exists y'((x, y') \in g \wedge (x', z) \in f)$

بنا به ۵-۲-۲ (الف): $\Rightarrow y' \in dom\, f$

چون $(x, y) \in g$ و $(x, y') \in g$ و g یک تابع است، پس $y = y'$ و درنتیجه $y \in dom\, f$.

بنابراین $ran\, g \subseteq dom\, f$.

حال فرض کنیم $ran\, g \subseteq dom\, f$ و نشان می‌دهیم که $dom(f \circ g) = dom\, g$. دیدیم که $dom(f \circ g) \subseteq dom\, g$. نشان می‌دهیم که $dom\, g \subseteq dom(f \circ g)$.

بنا به ۵-۲-۲ (الف): $x \in dom\, g \Rightarrow \exists y((x, y) \in g)$

بنا به ۵-۲-۲ (ب): $\Rightarrow y \in ran\, g$

بنا به فرض $ran\, g \subseteq dom\, f$: $\Rightarrow y \in dom\, f$

بنا به ۵-۲-۲ (الف): $\Rightarrow \exists z((y, z) \in f)$

پس نتیجه می‌شود که $(x, y) \in g$ و $(y, z) \in f$. بنابراین $(x, z) \in f \circ g$ و در نتیجه

پس $x \in dom(f\circ g)$. $dom(f\circ g) = dom\, g$.

تذکر:

فرض کنیم f و g دو تابع باشند . بنابه ۸-۱-۳، $f\circ g$ یک تابع است . دراینصورت داریم :

$$z = (f\circ g)(x) \Leftrightarrow (x,z) \in f\circ g$$
$$\Leftrightarrow \exists y((x,y) \in g \wedge (y,z) \in f)$$
$$\Leftrightarrow \exists y(y = g(x) \wedge z = f(y))$$
$$\Leftrightarrow z = f(g(x))$$

پس برای هر x داریم :

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

۹-۱-۳ : نتیجه :

اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ ، آنگاه $g\circ f : A \to C$.

اثبات :

بنا به ۸-۱-۳، $g\circ f$ یک تابع است . چون $ran f \subseteq B$ و $dom\, g = B$ پس $ran f \subseteq dom\, g$ و بنا به ۸-۱-۳، $dom(g\circ f) = dom f = A$ همچنین بنابه ۸-۱-۳ ، $ran(g\circ f) \subseteq ran\, g \subseteq C$. بنابراین $g\circ f$ یک تابع از A به C است ، یعنی $g\circ f: A \to C$

۱۰-۱-۳ : مثال :

(الف) اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $f(x) = x^2$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $g(x) = 2x$ آنگاه داریم $f\circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g\circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2, \quad (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2$$

(ب) فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند و تابع $f: A \to B$ را در نظر می‌گیریم . اگر $i_A: A \to A$ تابع همانی روی A باشد که در ۵-۱-۳ (ب) تعریف شده است آنگاه $f\circ i_A: A \to B$ و بعلاوه $f\circ i_A = f$ زیراکه $dom(f\circ i_A) = dom f = A$ وبرای هر x داریم :

$$(f \circ i_A)(x) = f(i_A(x)) = f(x)$$

بطریق مشابه اگر $i_B : B \to B$ تابع همانی روی B باشد آنگـــــــــاه $i_B \circ f : A \to B$ و $i_B \circ f = f$ •

تذکـر:

(الف) اگر f و g و h سه تابع باشند آنگاه بنا به ۲-۲-۲ داریم :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(ب) اگر f یك تابع باشد آنگاه تعریف می‌کنیم $f^1 = f$ و $f^2 = f \circ f$ بطور کلی برای هر عدد طبیعی n ، f^n را بوسیله تعریف بازگشتی زیر تعریف می‌کنیم :

اگر $n = 1$ ، آنگاه $f^1 = f$ ؛

اگر $n > 1$ ، آنگاه $f^n = f^{n-1} \circ f$.

۱۱-۱-۳ : تمرین :

در هریك از بند های زیر $f \circ g$ و $g \circ f$ را مشخص نمائید •

(الف) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $f(x) = |x|$ و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $g(x) = \frac{x}{2}$.

(ب) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $g(x) = x^2 + 1$.

۱۲-۱-۳ : تعریف :

تابع $f : A \to B$ را در نظر می‌گیریم •

(الف) تابع $g : B \to A$ یك معکوس چپ f نامیده می‌شود اگر $g \circ f = i_A$.

(ب) تابع $h : B \to A$ یك معکوس راست f نامیده می‌شود اگر $f \circ h = i_B$.

(ج) تابع $f' : B \to A$ یك معکوس f نامیده می‌شود اگر f' یك معکوس چپ و یك معکـــــوس راست f باشد • بعبارت دیگر $f' \circ f = i_A$ و $f \circ f' = i_B$.

۱۲-۱-۳ : مثال :

(الف) فرض کنیم $A=\{1,2\}$ و $B=\{a,b,c\}$. تابع $f:A\to B$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(1)=a \quad \text{و} \quad f(2)=b$$

در اینصورت تابع $g:B\to A$ که بصورت زیر تعریف می شود یك معکوس چپ f است •

$$g(a)=1 \ ، \ g(b)=2 \quad \text{و} \quad g(c)=2$$

زیرا که داریم :

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(a)=1 \quad \text{و} \quad (g\circ f)(2)=g(f(2))=g(b)=2$$

و در نتیجه $g\circ f=i_A$. بطریق مشابه می‌توان نشان داد که تابع $g':B\to A$ نیز که بصورت زیر تعریف می شود ، یك معکوس چپ f است •

$$g'(a)=1 \ ، \ g'(b)=2 \quad \text{و} \quad g'(c)=1$$

ملاحظه می شود که $g\neq g'$ و در نتیجه معکوس چپ یك تابع در صورت وجود درحالت عمومی یکتا نیست •

(ب) فرض کنیم $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ تابع $f:A\to B$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(1)=a \ ، \ f(2)=b \ ، \ f(3)=b$$

در اینصورت تابع $h:B\to A$ که بصورت زیر تعریف می شود یك معکوس راست f است•

$$h(a)=1 \quad \text{و} \quad h(b)=2$$

زیرا که داریم

$$(f\circ h)(a)=f(h(a))=f(1)=a \quad \text{و} \quad (f\circ h)(b)=f(h(b)=f(2)=b$$

و در نتیجه $f\circ h=i_B$ بطریق مشابه می‌توان نشان داد که تابع $h':B\to A$ نیز که بصورت زیر تعریف می شود ، یك معکوس راست f است •

$$h'(a)=1 \ \text{و} \ h'(b)=3$$

در اینجا ملاحظه می شود که $h\neq h'$ واین مثال نشان می‌دهد که معکوس راست یك تابع در صورت وجود درحالت عمومی یکتا نیست•

(ج) اگر A یك مجموعه باشد آنگاه تابع همانی i_A معکوس خود ش است • زیرا که برای هر $x\in A$ داریم :

$$(i_A\circ i_A)(x)=i_A(i_A(x))=i_A(x)=x$$

و در نتیجه $i_A \circ i_A = i_A$

(د) تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $f(x) = \frac{x}{2}$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت تابع $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بطوریکه $f'(x) = 2x$ یک معکوس f است • زیرا که برای هر x داریم :

$$(f \circ f')(x) = f(f'(x)) = f(2x) = \frac{2x}{2} = x \text{ و } (f' \circ f)(x) = f'(f(x)) = f'(\tfrac{x}{2}) = 2(\tfrac{x}{2}) = x$$

و در نتیجه $f' \circ f = f \circ f' = i_B$

(هـ) فرض کنیم $A = \{1 \text{ و } 2\}$ و $B = \{a, b\}$ تابع $f: A \to B$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(1) = a \text{ و } f(2) = a$$

در اینصورت f دارای معکوس چپ یا معکوس راست نیست • زیرا که اگر $g: B \to A$ یک معکوس چپ f باشد ، آنگاه $g \circ f = i_A$ و در نتیجه داریم :

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1 \text{ و } (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = 2$$

که یک تناقض است ، زیرا که g یک تابع فرض شده است • بطریق مشابه می‌توان نشان داد که f دارای معکوس راست نیست •

<u>۳-۱-۱۴ : تمرین :</u> نشان دهید که :

(الف) تابع f در ۳-۱-۱۳ (الف) دارای معکوس راست نیست •

(ب) تابع f در ۳-۱-۱۳ (ب) دارای معکوس چپ نیست •

<u>۳-۱-۱۵ : قضیه :</u>

تابع $f: A \to B$ را در نظر می‌گیریم • اگر g و h بترتیب یک معکوس چپ و یک معکوس راست f باشند ، آنگاه $g = h$ •

<u>اثبات :</u> بنا به ۳-۱-۱۰ (ب) :

$$g = g \circ i_B$$

بنا به فرض $: f\circ h = i_B$ $\quad = g\circ(f\circ h)$

بنا به تذکر بعد از ۱۰-۱-۳ بند (الف): $\quad = (g\circ f)\circ h$

بنا به فرض $: g\circ f = i_A$ $\quad = i_A\circ h$

بنا به ۱۰-۱-۳ (ب): $\quad = h$

<u>۱۶-۱-۳: نتیجه :</u> تابع معکوس یک تابع در صورت وجود یکتاست •

<u>اثبات :</u>

تابع $f: A\to B$ را در نظر می‌گیریم • فرض کنیم توابع f' و f'' دو معکوس f باشند • در اینصورت چون f' یک معکوس f است پس یک معکوس چپ f است وچون f'' یک معکوس f است پس یک معکوس راست f است • پس بنا به ۱۵-۱-۳، $f' = f''$ • بنابراین تابع معکوس f درصورت وجود یکتاست •

<u>تذکر:</u>

(الف) فرض کنیم f یک رابطه باشد • در اینصورت f یک تابع است اگر و فقط اگر $f: dom f \to ran f$. این مطلب را در زیر اثبات می‌کنیم • اگر $f: dom f \to ran f$ آنگاه بنابه تعریف این نماد، f یک تابع است • اگر f یک تابع باشد آنگاه بنابه تعریف داریم

$$f: dom f \to ran f$$

بنابراین اگر f یک تابع باشد آنگاه مجموعه های A و B وجود دارند بطوریکه $f: A\to B$ زیرا که کافیست فرض کنیم $A = dom f$ و $B = ran f$.

(ب) اگر f یک تابع باشد آنگاه از ۷-۱-۳ نتیجه شدکه معکوس f بعنوان یک رابطه یعنی f^{-1} درحالت عومی یک تابع نیست • در قضیه زیر ثابت می‌کنیم که f^{-1} یک تابع است اگر و فقط اگر تابع $f: dom f \to ran f$ دارای یک تابع معکوس باشد •

۱۷-۱-۳ : قضیه :

فرض کنیم f یک تابع باشد و $A=dom f$ و $B=ran f$. یک شرط لازم و کافی برای اینکه f^{-1} یک تابع باشد این است که $f: A\to B$ دارای یک معکوس مانند f' باشد و در اینصورت

$$f'=f^{-1}$$

اثبات:

فرض کنیم f^{-1} یک تابع باشد • نشان می‌دهیم که f^{-1} یک تابع معکوس f است • بنا به ۱-۲-۲ (الف)، $dom f^{-1}=ran f=B$ و $ran f^{-1}=dom f=A$ و در نتیجه $f^{-1}: B\to A$.

حال نشان می‌دهیم که $f^{-1}\circ f=i_A$ و $f\circ f^{-1}=i_B$ برای هر x اگر $z=(f^{-1}\circ f)(x)$ آنگاه داریم :

بنا به ۲۴-۲-۲ : $(x,z)\in f^{-1}\circ f \Rightarrow \exists y\,((x,y)\in f\wedge(y,z)\in f^{-1})$

بنا به ۱۲-۲-۲ : $\Rightarrow \exists y\,((y,x)\in f^{-1}\wedge(y,z)\in f^{-1})$

بنا به فرض تابع بودن f^{-1} : $\Rightarrow x=z$

پس برای هر x داریم $x=(f^{-1}\circ f)(x)$ و در نتیجه $f^{-1}\circ f=i_A$ • بطریق مشابه ثابت می‌شود که $f\circ f^{-1}=i_B$ • بنابراین f دارای معکوس است و اگر f' یک تابع معکوس f باشد آنگاه بنا به ۱۶-۱-۳، $f'=f^{-1}$ •

حال فرض کنیم f دارای یک تابع معکوس f' است • نشان می‌دهیم که f^{-1} یک تابع است • در واقع ثابت می‌کنیم که $f'=f^{-1}$ • چون f' یک تابع معکوس f است پس $f': B\to A$ و $f'\circ f=i_A$ و $f\circ f'=i_B$ • در اینصورت داریم :

بنا به تعریف : $(y,x)\in f' \Leftrightarrow x=f'(y)$

بنا به تابع بودن f : $\Leftrightarrow f(x)=f(f'(y))$

بنا به تذکر بعد از ۸-۱-۳ : $\Leftrightarrow f(x)=(f\circ f')(y)$

بنا به فرض : $\Longleftrightarrow f(x)=i_B(y)$

بنا به تعریف i_B : $\Longleftrightarrow f(x)=y$

بنابه تعریف : $\Longleftrightarrow (x,y)\in f$

بنا به ۱۲-۲-۲ : $\Longleftrightarrow (y,x)\in f^{-1}$

پس $f'=f^{-1}$ و در نتیجه f^{-1} یک تابع است که همان تابع معکوس f است.

۱۸-۱-۳ : نتیجه :

فرض کنیم f یک تابع باشد • در اینصورت تابع معکوس f در صورت وجود یکتا ست و مساوی f^{-1} می باشد •

اثبات : این نتیجه از ۱۶-۱-۳ و ۱۷-۱-۳ بدست می‌آید •

۱۹-۱-۳ : تعریف :

اگر تابع f دارای معکوس باشد آنگاه f را یک تابع معکوس پذیر می‌نامیم و در غیر اینصورت f را یک تابع معکوس ناپذیر خواهیم نامید •

۲۰-۱-۳ :

کدامیک از توابع زیر معکوس پذیر است ؟

الف) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بطوریکه $f(x)=x+1$

ب) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بطوریکه $f(x)=x^2$

ج) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بطوریکه $f(x)=x^3$

د) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$ بطوریکه $f(x)=\frac{1}{x}$.

۲۱-۱-۳ : تمرین : فرض کنید f یک تابع باشد •نشان دهیدکه :

(الف) $dom\, f = \{x \mid \exists y (y \in Ran\, f \wedge y = f(x))\}$

(ب) $Ran\, f = \{y \mid \exists x (x \in dom\, f \wedge y = f(x))\}$

$= \{f(x) \mid x \in dom\, f\}$

۳-۱-۲۲ : تمرین

فرض کنید $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دو تابع معکوس پذیر باشند • در اینصورت نشان دهید که :

(الف) f^{-1} معکوس پذیر است و $(f^{-1})^{-1} = f$ •

(ب) $g \circ f$ معکوس پذیر است و $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ •

۳-۲ : توابع یک بیک ، پوشا و دو سوبی

در این قسمت یک شرط لازم و کافی برای وجود تابع معکوس یک تابع ارائه می دهیم. در واقع توسط این شرط لازم و کافی می‌توان توابع معکوس پذیر را بسهولت شناسائی نمود و همچنین توسط آن می‌توان بسادگی مثالهای متعددی از توابع معکوس پذیرارائه کرد • بنابراین کاربرد این شرط و لازم و کافی در رابطه با توابع معکوس پذیر بسیار مهم است •

۳-۲-۱ : تعریف : تابع $f: A \to B$ را در نظر می‌گیریم •

(الف) f یک تابع یک بیک است اگر داشته باشیم :

$$\forall x\, \forall x' (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$$

(ب) f یک تابع پوشا ست اگر برای هر $y \in B$ یک $x \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $f(x) = y$ ، بعبارت دیگر $Ran\, f = B$ •

(ج) f یک تابع دوسوئی است اگر f یک بیک و پوشا باشد •

۲-۲-۳ : مثال

(الف) تابع f در ۱۲-۱-۳ (الف)، یك بیك است ولی پوشا نیست • یك بیك بودن f واضح است و پوشا نبودن f باین علت است که $c \in B$ ولی $c \notin ran\, f$ •

(ب) تابع f در ۱۲-۱-۳ (ب)، پوشاست ولی یك بیك نیست • پوشابودن f باین علت است که $ran\, f = B$ و یك بیك نبودن f باین علت است که $f(۲) = f(۳) = b$ ولی $۲ \neq ۳$ •

(ج) تابع i_A در ۱۲-۱-۳ (ج)، یك بیك و پوشا است • زیرا که برای هر x و برای هر x' داریم :

$$i_A(x) = i_A(x') \Rightarrow x = x'$$

پس i_A یك بیك است و بعلاوه برای هر $y \in A$ اگر $x = y$ آنگاه $i_A(x) = y$ و در نتیجه i_A پوشاست •

(د) تابع f در ۱۲-۱-۳ (د)، یك بیك و پوشاست • زیرا که برای هر x و برای هر x' داریم :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{x'}{۲} \Rightarrow x = x'$$

پس f یك بیك است و بعلاوه برای هر $y \in \mathbb{R}$ اگر $x = ۲y$ آنگاه $f(x) = \frac{x}{۲} = y$ و در نتیجه f پوشاست •

(هـ) تابع زیر یك تابع یك بیك است ولی پوشا نیست •

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(x) = ۲x$$

یك بیك است زیرا که برای هر x و برای هر x' داریم :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow ۲x = ۲x' \Rightarrow x = x'$$

f پوشانیست زیرا که :

$$ran\, f = \{۲x \mid x \in \mathbb{N}\} \neq \mathbb{N}$$

(و) تابع زیر یك تابع پوشاست ولی یك بیك نیست

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(x) = |x|$$

f پوشاست زیرا که برای هر $y\in N$ اگر $x=y$ آنگاه داریم :

$$f(x)=|x|=|y|=y$$

f یک بیک نیست زیرا که مثلاً $f(-1)=|-1|=1=|1|=f(1)$ ولی $1-\neq 1$ •

(ز) تابع f در ۱۲-۰-۳ (هـ) ، یک بیک و پوشا نیست • زیرا که $f(1)=f(2)=a$ ولی $2\neq 1$ و در نتیجه یک بیک نیست و بعلاوه $ran f\neq B$ و در نتیجه پوشا نیست •

۳-۲-۳ : قضیه

تابع $f:A\to B$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت :

(الف) اگر $A\neq\phi$ آنگاه f یک بیک است اگر و فقط اگر f دارای معکوس چپ باشد •

(ب) f پوشاست اگر و فقط اگر f دارای معکوس راست باشد •

(ج) f دو سویی است اگر و فقط اگر f معکوس پذیر باشد •

اثبات :

(الف) فرض کنیم f یک بیک است • چون $A\neq\phi$ پس عنصری مانند a در A وجود دارد • تعریف می‌کنیم $g:B\to A$ بطوریکه $g(y)=x$ اگر $y\in ran f$ و $y=f(x)$ برای یک $x\in A$ و $g(y)=a$ اگر $y\notin ran f$ • در اینصورت g یک تابع است • برای اثبات این مطلب فرض کنیم $y=y'$ اگر $y=y'\in ran f$ و $y=f(x)$ و $y'=f(x')$ آنگاه $g(y)=x$ و $g(y')=x'$ ولی چون $y=y'$ پس $f(x)=f(x')$ و چون f یک بیک است پس $x=x'$ و در نتیجه $g(y)=g(y')$ • اگر $y=y'\notin ran f$ آنگاه $g(y)=a=g(y')$ پس g یک تابع است • نشان می‌دهیم که g یک معکوس چپ f می‌باشد ، یعنی نشان می‌دهیم $g\circ f=i_A$. برای هر x داریم :

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$$

پس g یک معکوس چپ f است •

حال فرض کنیم f دارای یک معکوس چپ مانند g باشد • نشان می‌دهیم f یک بیک است • برای هر x و برای x' داریم :

بنا به تابع بودن g : $\quad f(x)=f(x')\Rightarrow g(f(x))=g(f(x'))$

بنا به تذکر بعد از ۸-۱-۳ : $\Rightarrow (g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$

بنا به فرض $g\circ f = i_A$: $\Rightarrow i_A(x) = i_A(x')$

بنا به تعریف i_A : $\Rightarrow x = x'$

پس f یک بیک است ۰

(ب) فرض کنیم f پوشا ست ۰ در اینصورت برای هر $y\in B$ یک $x\in A$ وجود دارد بطوریکه $f(x) = y$ برای هر $y\in B$ یک x معینی در A انتخاب می‌کنیم بطوریکه $f(x) = y$ در اینصورت $h: B\to A$ بطوریکه $h(y) = x$ یک تابع است و بعلاوه برای هر y داریم :

$$(f\circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y$$

پس $f\circ h = i_B$ و در نتیجه f دارای یک معکوس راست است ۰

حال فرض کنیم f دارای یک معکوس راست مانند h است ۰ نشان می‌دهیم که f پوشاست ۰ فرض کنیم $y\in B$ ۰ در اینصورت چون $f\circ h = i_B$ پس $(f\circ h)(y) = i_B(y)$ و در نتیجه $f(h(y)) = y$ ۰ بنابراین اگر $x = h(y)$ آنگاه $x\in A$ و $f(x) = y$ ۰ پس f پوشاست ۰

(ج) از دو بند (الف) و (ب) نتیجه می‌شود ۰

<u>تذکـر :</u>

در اثبات بند (ب) قضیه فوق که با فرض پوشا بودن f وجود تابع $h: B\to A$ بطوریکه برای هر $y\in B$ می‌توان x معینی را در A انتخاب کرد که $h(y) = x$ و $y = f(x)$ ، فرض گردید ۰ در واقع این فرض توسط یک اصل مهمی در ریاضیات که به اصل انتخـــاب معروف است امکان پذیر می‌باشد ۰ در فصل <u>۵</u> اصل انتخاب را بیان می‌کنیم و درآنجـــا توسط این اصل اثبات دقیق بند (ب) قضیه فوق را خواهیم نوشت ۰

<u>۴-۲-۳ : نتیجه :</u>

اگر $f: A\to B$ و $g: B\to C$ دو تابع دو سویی باشند آنگاه $g\circ f: A\to C$ یک تابـع دو سویی است ۰

<u>اثبات :</u>

چون f و g دو سویی هستند بنا به ۳-۲-۳ (ج)، f و g معکوس پذیرند. بنا به ۳-۱-۲۲ (ب)، $g\circ f$ معکوس پذیر است و در نتیجه بنا به ۳-۲-۳ (ج)، $g\circ f$ دو سویی است.

نتیجه فوق را می‌توان بصورت زیر تعمیم داد :

<u>۳-۲-۵ : نتیجه</u>

اگر توابع $f_1 : A_1 \to A_2$، $f_2 : A_2 \to A_3$، ...، $f_n : A_n \to A_{n+1}$ دو سویی باشند، آنگاه $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 : A_1 \to A_{n+1}$ دو سویی است.

<u>اثبات:</u> توسط استقرا این نتیجه را اثبات می‌کنیم.

<u>پایه استقرا</u>: اگر $n = 1$ آنگاه اثبات روشن است.

<u>گام استقرا</u>: فرض کنیم که نتیجه برای n برقرار است و آنرا برای $n+1$ اثبات می‌کنیم. بنا به تذکر بعد از ۳-۱-۱۰ داریم :

$$f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = f_{n+1} \circ (f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)$$

بنا به فرض $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ و f_{n+1} دو سویی هستند و در نتیجه بنا به ۳-۲-۴ تابع $f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ دو سویی است.

<u>۳-۲-۶ : تمرین :</u>

(الف) تابع $f : A \to B$ را در نظر می‌گیریم و تابع $g : B \to P(A)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$g(b) = \{ x \mid x \in A \wedge f(x) = b \}$$

نشان دهید که اگر f پوشا باشد، آنگاه g یک بیک است. آیا عکس این مطلب درست

است ؟

(ب) دو تابع $f: A \to B$ و $g: C \to D$ را در نظر می‌گیریم • تابع $h: A \times C \to B \times D$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

نشان دهید که اگر f و g دو سویی باشند آنگاه h نیز دو سویی است •

(ج) توابع $f: A \to B$ و $g: B \to C$ را در نظر می‌گیریم • ثابت کنید که اگر $g \circ f$ یک بیک باشد ، آنگاه f یک بیک است و اگر $g \circ f$ پوشا باشد ، آنگاه g پوشاست •نتیجه بگیرید که اگر $g \circ f$ دو سویی باشد ، آنگاه f یک بیک و g پوشا است • با ارائه یک مثال ناقض نشان دهید که عکس این نتیجه در حالت عمومی برقرار نیست •

<u>۷-۲-۳ : تمرین</u>

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند • نشان دهید که :

(الف) اگر $A = \phi$ آنگاه دقیقاً یک تابع از A به B وجود دارد •

(ب) اگر $A \neq \phi$ و $B = \phi$ ، آنگاه تابعی از A به B وجود ندارد •

<u>تذکر:</u> تابع $f: A \to B$ را در نظر می‌گیریم •

(الف) اگر $X \subseteq A$ ، آنگاه بنا به ۲۱-۲-۲ داریم :

$$f[X] = \{ y \mid \exists x (x \in X \wedge y = f(x)) \}$$

یا

$$f[X] = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

همانطوریکه در ۲۱-۲-۲ گفته شد ، $f[X]$ مجموعه تصویر X تحت تابع f است و البته از تعریف روشن است که یک زیر مجموعه B می‌باشد • همچنین روشن است که $f[A] = ran\, f$.

(ب) اگر رابطه f^{-1} را در نظر بگیریم و $Y \subseteq B$ ، آنگاه بنا به ۲۱-۲-۲ داریم : .

$$f^{-1}[Y] = \{ x \mid \exists y (y \in Y \wedge (y, x) \in f^{-1}) \}$$

یا

$$f^{-1}[Y] = \{ x \mid \exists y (y \in Y \wedge (x, y) \in f) \}$$

یا
$$f^{-1}[Y]=\{x \mid \exists y(y\in Y \wedge y=f(x))\}$$
یا
$$f^{-1}[Y]=\{x \mid f(x)\in Y\}$$
بنا به ۲۱-۲-۲، $f^{-1}[Y]$ مجموعه تصویر Y تحت رابطه f^{-1} است و البته زیر مجموعه A می‌باشد • $f^{-1}[Y]$ را مجموعه تصویر معکوس Y تحت تابع f نیز می‌نامیم • در اینجا دقت کنید که f^{-1} لزوماً یک تابع نیست •

ج) اگر $X\subseteq A$، آنگاه بنا به ۱۶-۲-۲ داریم :
$$f|X=\{(x,y) \mid x\in X\wedge y=f(x)\}$$
چون f یک تابع است ، بسهولت دیده می‌شود که $f|X$ نیز یک تابع است و در واقع داریم :
$$(f|X)(x)=f(x) \text{ بطوریکه } f|X:X\longrightarrow B$$
همانطوریکه در ۱۶-۲-۲ گفته شد ، f/X تحدید یا تقییر تابع f روی X نامیده می‌شود •

از ۲۳-۲-۲ قضیه زیر را داریم :

<u>۸-۲-۳ : قضیه</u>

تابع $f:A\to B$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $X\subseteq A$ و $X'\subseteq A$ • در اینصورت داریم :

(الف) $f[X]=Ran(f|X)$

(ب) $f[X\cup X']=f[X]\cup f[X']$

(ج) $f[X\cap X']\subseteq f[X]\cap f[X']$

(د) $f[X]-f[X']\subseteq f[X-X']$

(هـ) $X\subseteq X'\Longrightarrow f[X]\subseteq f[X']$

(و) $f[\phi]=\phi$

۹-۲-۳ : تمرین :

(الف) مثالی از یک تابع $f:A\to B$ و زیر مجموعه های X و X' از A ارائه کنید بطوریکه:

$$f[X\cap X']\neq f[X]\cap f[X']$$

اگر تابع $f:A\to B$ را در نظر بگیریم آنگاه تحت چه شرایطی تساوی

$f[X\cap X']=f[X]\cap f[X']$ برای هر دو زیر مجموعه X و X' از A برقرار است ؟

(ب) مثالی از یک تابع $f:A\to B$ و زیر مجموعه های X و X' از A ارائه کنید بطوریکه :

$$f[X]-f[X']\neq f[X-X']$$

اگر تابع $f:A\to B$ را در نظر بگیریم آنگاه تحت چه شرایطی تساوی

$f[X]-f[X']=f[X-X']$ برقرار است ؟

(ج) تابع $f:A\to B$ را در نظر بگیرید ۰ فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه ای از زیر مجموعه های A باشد ، یعنی $\mathcal{A}\subseteq P(A)$ نشان دهید که :

$$f[\cap\mathcal{A}]\subseteq\bigcap_{X\in\mathcal{A}}f[X] \quad \text{و} \quad f[\cup\mathcal{A}]=\bigcup_{X\in\mathcal{A}}f[X]$$

۱۰-۲-۳ : قضیه :

تابع $f:A\longrightarrow B$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $Y\subseteq B$ و $Y'\subseteq B$. در اینصورت داریم :

(الف) $f^{-1}[Y\cup Y']=f^{-1}[Y]\cup f^{-1}[Y']$

(ب) $f^{-1}[Y\cap Y']=f^{-1}[Y]\cap f^{-1}[Y']$

(ج) $f^{-1}[Y-Y']=f^{-1}[Y]-f^{-1}[Y']$

اثبات :

(الف) از ۳-۲-۲۳ (الف)، نتیجه می‌شود ۰

(ب) بنابه ۳-۲-۲۳ (ج)، داریم $f^{-1}[Y\cap Y']\subseteq f^{-1}[Y]\cap f^{-1}[Y']$ نشان می‌دهیم که

$$f^{-1}[Y]\cap f^{-1}[Y']\subseteq f^{-1}[Y\cap Y']$$

بنا به تعریف اشتراک : $x\in f^{-1}[Y]\cap f^{-1}[Y']\Rightarrow x\in f^{-1}[Y]\wedge x\in f^{-1}[Y']$

بنا به بند (ب) تذکر بعد از ۷-۲-۳ : $\Rightarrow f(x)\in Y\wedge f(x)\in Y'$

بنا به تعریف اشتراک : $\Rightarrow f(x)\in Y\cap Y'$

بنا به بند (ب) تذکر بعد از ۷-۲-۳ : $\Rightarrow x\in f^{-1}[Y\cap Y']$

پس $f^{-1}[Y\cap Y']=f^{-1}[Y]\cap f^{-1}[Y']$.

(ج) بنا به ۲۳-۲-۲ (د)، $f^{-1}[Y]-f^{-1}[Y']\subseteq f^{-1}[Y-Y']$ نشان میدهیم که $f^{-1}[Y-Y']\subseteq f^{-1}[Y]-f^{-1}[Y']$.

بنا به بند (ب) تذکر بعد از ۷-۲-۳ : $x\in f^{-1}[Y-Y']\Rightarrow f(x)\in Y-Y'$

بنا به تعریف تفاضل دو مجموعه : $\Rightarrow f(x)\in Y\wedge f(x)\notin Y'$

بنا به بند (ب) تذکر بعد از ۷-۲-۳ : $\Rightarrow x\in f^{-1}[Y]\wedge x\notin f^{-1}[Y']$

بنا به تعریف تفاضل دو مجموعه : $\Rightarrow x\in f^{-1}[Y]-f^{-1}[Y']$

پس $f^{-1}[Y-Y']=f^{-1}[Y]-f^{-1}[Y']$.

<u>۱۱-۲-۳ : تمرین :</u>

(الف) تابع $f:A\to B$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathbb{B}\subseteq \mathcal{P}(B)$ نشان دهید که

$$f^{-1}[\cap\mathbb{B}]=\bigcap_{Y\in\mathbb{B}}f^{-1}[Y] \quad \text{و} \quad f^{-1}[\cup\mathbb{B}]=\bigcup_{Y\in\mathbb{B}}f^{-1}[Y]$$

(ب) تابع $f:A\to B$ را در نظر بگیرید . اگر $X\subseteq A$، آنگاه نشان دهید که $X\subseteq f^{-1}[f[X]]$ تحت چه شرایط تساوی $X=f^{-1}[f[X]]$ برای هر زیرمجموعه X از A برقرار است ؟

(ج) تابع $f:A\to B$ را در نظر بگیرید . اگر $Y\subseteq ran\, f$ آنگاه نشان دهید که

$$f[f^{-1}[Y]]=Y$$

(د) نشان دهید که $f:B\to C$ یك بیك است اگر و فقط اگر برای هر دو تابع g و h از A به B تساوی $f\circ g=f\circ h$ نتیجه بدهد $g=h$، که در آن A یك مجموعه دلخواه است •

(هـ) نشان دهید که $f:A\to B$ پوشاست اگر و فقط اگر برای هردو تابع g و h از B به C تساوی $g\circ f=h\circ f$ نتیجه بدهد $g=h$، که درآن C یك مجموعه دلخوا است •

۳-۳ : ضرب عمومی مجموعه ها

در این قسمت مفهوم ضرب عمومی مجموعه ها را معرفی می‌کنیم • از این مفهوم در فصل ۵ در رابطه با اصل انتخاب استفاده خواهیم کرد • چون حاصلضرب عمومی، مجموعه ای از توابع می باشد، این مفهوم را در اینجا معرفی می‌کنیم ولی کاربرد آنرا به فصل ۵ موکول خواهیم کرد •

۳-۳-۱ : تعریف

فرض کنیم I یك مجموعه و $\mathcal{A}$ یك مجموعه از مجموعه ها باشد • اگر $f:I\to\mathcal{A}$ یك تابع دو سویی باشد آنگاه می‌گوئیم $\mathcal{A}$ یك مجموعه اندیس دار است • برای هر i در I مقدار i را تحت تابع f با A_i نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$.

مجموعه I را مجموعه اندیس و هر عنصر آنرا یك اندیس می‌نامیم •

۳-۳-۲ : مثال :

مجموعه $\mathcal{A}=\{\{۲,۶\},\{۲,۵,\phi\},\{۲,\{\phi\},\phi\}\}$ را در نظر می‌گیریم • اگر $I=\{۱,۲,۳\}$ آنگاه تابع $f:I\to\mathcal{A}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود یك تابع دوسویی است

$$f(۱)=\{۲,۶\}\ ،\ f(۲)=\{۲,۵,\phi\}\ \text{و}\ f(۳)=\{۲,\{\phi\},\phi\}$$

در اینصورت $\mathcal{A}$ یك مجموعه اندیس دار با مجموعه اندیس I است • در اینجا

$$A_۱=\{۲,۶\}\ ،\ A_۲=\{۲,۵,\phi\}\ \text{و}\ A_۳=\{۲,\{\phi\},\phi\}$$

تذکر :

اگر $\mathcal{A}$ یک مجموعه اندیس دار با مجموعه اندیس I باشد ، آنگاه تعریف می‌کنیم :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap \mathcal{A} \quad \text{و} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \mathcal{A}$$

۳-۳-۲ : مثال :

(الف) مجموعه اندیس دار $\mathcal{A}$ در ۲-۳-۳ را در نظر می‌گیریم . در اینصورت داریم :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \mathcal{A}$$
$$= \{۲، ۴، ۵، \phi، \{\phi\}\}$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap \mathcal{A}$$
$$= \{۲\}$$

(ب) مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\mathcal{A} = \{\{۱\}، \{۱، ۲\}، \{۱، ۲، ۳\}، \ldots، \{۱، ۲، \ldots، n\}، \ldots\}$$

تابع f را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$f(n) = \{۱، \ldots، n\}$$

در اینصورت f یک تابع دوسویی است و در نتیجه $\mathcal{A}$ یک مجموعه اندیس‌دار با مجموعه اندیس $\mathbb{N}$ است . در اینجا برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $A_n = \{۱، \ldots، n\}$. همچنین داریم :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup \mathcal{A}$$
$$= \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap \mathcal{A}$$
$$= \{۱\}$$

۳-۳-٤ : تمرین :

تساویهای $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ و $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{۱\}$ در ۳-۳-۲ (ب) را اثبات نمایید .

تذکر : اگر $\mathcal{A}$ یک مجموعه اندیس دار با مجموعه اندیس $I = \{۱، \ldots، n\}$ باشد آنگاه

نمادهای $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ نیز بترتیب بجای نماد $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ و $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ بکار برده می شوند • همچنین اگر $\mathscr{A}$ یک مجموعه اندیس دار با مجموعه اندیس $\mathbb{N}$ باشد، آنگاه نمادهای $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز بترتیب بجای نمادهای $\bigcup\limits_{i\in \mathbb{N}} A_i$ و $\bigcap\limits_{i\in \mathbb{N}} A_i$ بکاربرده می شوند •

۳-۳-۵ : تمرین :

(الف) اگر $\mathscr{A}=\{\{۲,۴,۵\},\{۳,۲,۷,۵\},\{۱,۲,۳,۵\}\}$ و $I=\{۱,۲,۳\}$،

آنگاه $\bigcup\limits_{i=1}^{۳} A_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{۳} A_i$ را بیابید •

(ب) فرض کنیم: $A_i=[\circ,\frac{1}{i}]=\{x \mid \circ\leqslant x\leqslant \frac{1}{i}\}$

اگر $I=\{۱,\dots,n\}$ و $\mathscr{A}=\{A_i\}_{i\in I}$، آنگاه $\bigcup\mathscr{A}$ و $\bigcap\mathscr{A}$ را بیابید •

(ج) اگر $\mathscr{A}=\{\{-۱,\circ,۱\},\{-۲,-۱,\circ,۱,۲\},\dots,\{-n,-n+۱,\dots,-۱,\circ,۱,\dots,n-۱,n\},\dots\}$

آنگاه $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ را بیابید •

۳-۳-۶ : تمرین :

مجموعه های اندیس دار $\{A_i\}_{i\in I}$ و $\{B_j\}_{j\in J}$ را در نظر بگیرید • نشان دهید که :

(الف) $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\right)=\bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J}(A_i\cap B_j)$

(ب) $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcap\limits_{j\in J} B_j\right)=\bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J}(A_i\cup B_j)$

(ج) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i-\bigcup\limits_{j\in J} B_j=\bigcup\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J}(A_i-B_j)$

$$\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i - B_j)$$ (د

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \times B_j)$$ (هـ

$$\bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \times B_j)$$ (و

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \times B_j)$$ (ز

۷-۳-۳ : تعریف :

مجموعه اندیس دار $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ را در نظر می‌گیریم ۰ حاصلضرب عمومی $\mathcal{A}$ را که

با نماد $\prod_{i\in I} A_i$ نمایش می‌دهیم ، عبارتست از:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i\,(i\in I \Rightarrow f(i)\in A_i)\}$$

هر عضو $\prod_{i\in I} A_i$ را یک Iـتایی می‌نامیم و اگر $f\in\prod_{i\in I} A_i$، عضو $f(i)$ از A_i را مؤلفه

iـام f می‌نامیم ۰ ملاحظه می‌شود که برای هر دو عضو f و g در $\prod_{i\in I} A_i$ داریم:

$$f=g \Leftrightarrow \forall i\,(i\in I \Rightarrow f(i)=g(i))$$

بعبارت دیگر $f=g$ اگر و فقط اگر برای هر $i\in I$، مؤلفه iـام f مساوی مؤلفه iـام g باشد

تذکر:

تعریف فوق در واقع تعمیم ۲-۱-۱۴ است ۰ زیرا که فرض کنیم $I=\{1,\dots,n\}$ و $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_n\}$. میخواهیم نشان دهیم که دراینصورت دو تعریف :

$$\overset{n}{\times} A_i = \{(a_1,\dots a_n) \mid a_1\in A_1 \wedge \dots \wedge a_n\in A_n\}$$ و

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i\,(i\in I \Rightarrow f(i)\in A_i)\}$$

یکسانند • فرض کنیم $(a_1, \dots, a_n) \in \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$ در اینصورت $(a_1, \dots, a_n)$ را می‌توان بعنوان تابع $f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ که بصورت زیر تعریف می‌شود ، در نظر گرفت •

$f(1) = a_1$ ، $f(2) = a_2$ ، ... ، $f(n) = a_n$.

در اینصورت ملاحظه می‌شود که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$ و درنتیجه $f \in \prod_{i \in I} A_i$ بر عکس فرض کنیم $f \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ در اینصورت برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$. اگر برای هر $i \in I$ داشته باشیم $f(i) = a_i$ که در آن $a_i \in A_i$، آنگاه تابع f را می‌توان بعنوان n - تایی مرتب $(a_1, \dots, a_n)$ در نظر گرفت •

بنابراین ۷-۳-۳ تعمیم از ۱۴-۱-۲ می‌باشد •

تذکر:

اگر $I = \{1, \dots, n\}$ و $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ آنگاه نماد $\prod_{i=1}^{n} A_i$ نیزبجای $\prod_{i \in I} A_i$ بکار برده می‌شود • همچنین اگر $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in N}$ آنگاه نماد $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز بجای $\prod_{i \in N} A_i$ بکار برده می‌شود •

۷-۳-۳ : مثال :

مجموعه اندیس‌دار $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, \phi\}\}$ با مجموعه اندیس $I = \{1, 2\}$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت $\prod_{i=1}^{2} A_i = \{f, g, h, l\}$ بطوریکه f, g, h, l همگی توابعی از I به $\bigcup_{i=1}^{2} A_i$ هستند که بصورت زیر تعریف می‌شوند :

$f(1) = 1$ ، $f(2) = 3$ ، $g(1) = 1$ ، $g(2) = \phi$ ، $h(1) = 2$ ، $h(2) = 3$ ، $l(1) = 2$ ، $l(2) = \phi$.

در این‌مثال می‌توان تابع f را به زوج مرتب $(1, 3)$، تابع g را به زوج مرتب $(1, \phi)$، تابع h را به زوج مرتب $(2, 3)$ و تابع l را به زوج مرتب $(2, \phi)$ نظیر نمود •

۸-۳-۳ : تمرین :

اگر $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ یک مجموعه اندیس دار باشد بطوریکه برای هر $i \in I$ داشته باشیم $A_i = B$ که در آن B یک مجموعه معین است، آنگاه نشان دهید که $\prod_{i \in I} A_i$ مساوی مجموعه توابع از I به B است •

فصل ٤

روابط هم ارزی و ترتیبی

این فصل به تعریف و بررسی خواص روابط هم ارزی و ترتیبی اختصاص دارد • مفهوم رابطه هم ارزی کاربرد مهمی در نظریه اعداد و جبر دارد • در فصل ۷ که در مورد ساختمان اعداد می‌باشد کاربرد مفهوم رابطه هم ارزی را خواهیم دید • روابط ترتیبی نیز دسته مهمی از روابط را تشکیل می‌دهند و معمولاً با مقایسه کردن اعداد از نظر کوچکتر یا مساوی بودن بوجود می‌آیند •

۱-٤ : روابط هم ارزی

مجموعه A را در نظر می‌گیریم و رابطه I را روی A بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$I = \{(x, y) \mid x, y \in A \wedge (x = y)\}$$

در اینصورت رابطه I دارای خواص زیر است :

(الف) برای هر $x \in A$ چون $x = x$ پس برای هر $x \in A$ داریم $x I x$ •

(ب) برای هر $x \in A$ و هر $y \in A$ اگر داشته باشیم $x I y$ آنگاه $x = y$ یا $y = x$ و در نتیجه داریم $y I x$ • پس برای هر $x \in A$ و هر $y \in A$ اگر داشته باشیم $x I y$ آنگاه داریم $y I x$ •

(ج) برای هر $x \in A$، $y \in A$ و $z \in A$ اگر داشته باشیم $x I y$ و $y I z$ آنگاه $x = y$ و $y = z$ و در نتیجه $x = z$ که نتیجه می‌دهد $x I z$ • پس برای هر $x \in A$، $y \in A$ و $z \in A$ اگر داشته باشیم $x I y$ و $y I z$ آنگاه داریم $x I z$ •

حال این سه خاصیت رابطه فوق را بطور کلی در زیر تعریف می‌کنیم •

۱-۱-٤ : تعریف :

فرض کنیم R یك رابطه روی مجموعه A باشد • در اینصورت :

(الف) R یك رابطه انعکاس نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم xRx ، بعبارت دیگر :

$$\forall x \,(x \in A \Longrightarrow (x,x) \in R)$$

(ب) R یك رابطه متقارن نامیده می‌شود اگر برای هر x و y در A ، xRy نتیجه بدهد yRx ، بعبارت دیگر :

$$\forall x \forall y \,((x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R)$$

(ج) R یك رابطه انتقالی نامیده می‌شود اگر برای هر x ، y و z در A ، xRy و yRz نتیجه بدهد xRz بعبارت دیگر :

$$\forall x \forall y \forall z \,((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R)$$

۲-۱-٤ : مثال :

(الف) روابط R_1 ، R_2 ، R_3 و R_4 روی مجموعه A در ۳۱-۲-۲ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت داریم :

R_1 انعکاس نیست، زیرا که مثلاً $(a,a) \notin R_1$ • متقارن است ، زیرا که برای هر x و y در A اگر $(x,y) \in R_1$ آنگاه $(y,x) \in R_1$ • R_1 انتقالی نیست ، زیرا که مثلاً $(a,b) \in R_1$ و $(b,a) \in R_1$ ولی $(a,a) \notin R_1$ •

R_2 انعکاس است ، زیرا که برای هر $x \in A$ داریم $(x,x) \in R_2$ • R_2 متقارن نیست، زیرا که مثلاً $(c,e) \in R_2$ ولی $(e,c) \notin R_2$ • R_2 انتقالی نیست ، زیرا که مثلاً $(c,e) \in R_2$ و $(e,b) \in R_2$ ولی $(c,b) \notin R_2$ •

R_3 انعکاس نیست ، زیرا که مثلاً $(a,a) \notin R_3$ • R_3 متقارن نیست ، زیرا که مثلاً $(a,c) \in R_3$ ولی $(c,a) \notin R_3$ • R_3 انتقالی است زیرا که برای هر x ، y و z در A اگر داشته باشیم $(x,y) \in R_3$ و $(y,z) \in R_3$ آنگاه داریم $(x,z) \in R_3$ •

R_4 انعکاس ، متقارن و انتقالی است، زیرا که در هر سه تعریف صدق می‌کند •

(ب) فرض کنیم L مجموعه همه خطوط روی یك صفحه باشد • در اینصورت روابط R و S را روی L بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in L \wedge \quad (x \text{ موازی } y \text{ است})\}$$
$$S = \{(x, y) \mid x, y \in L \wedge \quad (x \text{ بر } y \text{ عمود است})\}$$

در واقع R همان رابطه توازی و S همان رابطه تعامد هستند •

اگر فرض کنیم که هر خط با خودش موازی است ، آنگاه R یك رابطه انعکاس می‌باشد • همچنین اگر خط x با خط y موازی باشد ، آنگاه خط y موازی خط x است. پس R متقارن است • اگر خط x با خط y و خط y با خط z موازی باشند ، آنگاه نتیجه می‌شود که خط x موازی خط z است و در نتیجه R انتقالی می‌باشد •

چون یك خط برخودش عمود نیست پس S انعکاس نیست . اگر خط x بر خط y عمود باشد ، آنگاه خط y برخط x عمود است و در نتیجه S متقارن است • اگر خط x بر خط y و خط y بر خط z عمود باشند ، آنگاه خط x برخط z عمود نیست و در نتیجه S انتقالی‌نمی باشد •

(ج) رابطه R را روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x < y)\}$$

چون $1 \nless 1$ پس R انعکاس‌نیست • چون $1<2$ ولی $2 \nless 1$ پس R متقارن نیست •
اگر $x<y$ و $y<z$ ، آنگاه میدانیم که $x<z$ و در نتیجه R انتقالی است •

تذکـــر :

روابط R_1 الی R_4 را در ۱-۳-۲-۲ در نظر می‌گیریم • در جدول R_1 ملاحظه می‌شود که اها نسبت به قطر اصلی جدول حالت تقارنی دارند • این مطلب بسبب متقارن بودن R_1 است • همچنین چون روابط R_2 و R_4 انعکاس هستند در همه مربعات روی قطر اصلی جداول آنها عدد ۱ قرار دارد •

در حقیقت ، قضیه زیر را در رابطه با مطالب فوق داریم :

۳-۱-٤ : قضیـــه :

فرض کنیم A یك مجموعه متناهی و R یك رابطه روی A باشد • در اینصـــورت داریـــم :

(الف) R انعکاسی است اگر و فقط اگر در همه مربعات روی قطر اصلی جدول R عدد ۱ قرار داشته باشد •

(ب) R متقارن است اگر و فقط اگر ۱ های جدول R نسبت به قطر اصلی حالت تقارنی داشته باشند •

اثبات :

(الف) R انعکاسی است اگر و فقط اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم xRx •همچنین xRx اگر و فقط اگر در همه مربعات روی قطر اصلی جدول R عدد ۱ قرار داشته باشد • بنابراین R انعکاسی است اگر و فقط اگر در همه مربعات روی قطر اصلی جدول R عدد ۱ قرار داشته باشد •

(ب) R متقارن است اگر و فقط اگر برای هر $x,y \in A$ ، xRy نتیجه بدهد yRx • همچنین برای هر $x,y \in A$ ، xRy نتیجه می‌دهد yRx اگر و فقط اگر برای هر $x,y \in A$ اگر در مربع وابسته به x و y عدد ۱ قرار داشته باشد ، آنگاه در مربع وابسته به y و x نیز عدد ۱ قرار داشته باشد • بعبارت دیگر برای هر $x,y \in A$ ، xRy ، نتیجه می‌دهد yRx اگر و فقط اگر ۱ های جدول R نسبت به قطر اصلی حالت تقارنی داشته باشند • بنابراین R متقارن است اگر و فقط اگر ۱ های جدول R نسبت به قطر اصلی حالت تقارنی داشته باشند •

تذکر:

فرض کنیم R یک رابطه روی یک مجموعه متناهی باشد • در اینصورت بنابه ۳-۱-٤ توسط جدول R می‌توان بسهولت تعیین کرد که R انعکاسی یا متقارن هست یا خیر• اگر R انتقالی باشد ، متاسفانه شکل هندسی ساده ای از نحوه قرار گرفتن مربعهائی که در آنها عدد ۱ قرار دارد ، ایجاد نمی‌شود • برای تعیین انتقالی‌بودن R از روی جدول باید باین صورت بررسی کرد که برای هر $x,y,z \in A$ اگر در مربع وابسته به x و y و در مربع وابسته به y و z عدد ۱ قرار داشته باشد آنگاه در مربع وابسته به x و z نیز عدد ۱ قرار داشته باشد •

٤-۱-٤ : تمرین :

(الف) روابط زیر روی مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ را در نظر بگیرید .

$$R_1=\{(a,b),(c,d),(b,a),(d,c)\}$$

و

$$R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$$

ابتدا جداول R_1 و R_2 را تشکیل دهید و سپس تعیین کنید که آیا انعکاس، متقارن یا انتقالی می‌باشند یا خیر.

(ب) رابطه $R=\{(x,y)\mid x,y\in A\wedge(x\leq y)\}$ را روی $A=\{1,2,3,4\}$ در نظر بگیرید . جدول R را تشکیل دهید و سپس تعیین کنید که آیا R انعکاس، متقارن یا انتقالی هست یا خیر.

(ج) فرض کنید T مجموعه همه مثلثهای واقع در یک صفحه باشد . روابط R و S را روی T بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R=\{(x,y)\mid x,y\in T\wedge(\text{با } y \text{ متشابه است } x)\}$$

و

$$S=\{(x,y)\mid x,y\in T\wedge(x \text{ مساحت} = y \text{ مساحت})\}$$

تعیین کنید که آیا R و S انعکاس، متقارن یا انتقالی هستند یا خیر.

٤-۱-٥ : قضیه :

فرض کنیم A یک مجموعه و R یک رابطه روی A باشد . رابطه I روی A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$I=\{(x,y)\mid x,y\in A\wedge(x=y)\}$$

یا

$$I=\{(x,x)\mid x\in A\}$$

در اینصورت داریم :

(الف) R انعکاس است اگر و فقط اگر $I\subseteq R$.

(ب) R متقارن است اگر و فقط اگر $R=R^{-1}$.

(ج) R انتقالی است اگر و فقط اگر $R\circ R\subseteq R$.

(د) R متقارن و انتقالی است اگر و فقط اگر $R^{-1}\circ R=R$.

اثبات :

(الف) R انعکاسی است اگر و فقط اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $(x,x) \in R$ • همچنین برای هر $x \in A$، $(x,x) \in R$ اگر و فقط اگر $I \subseteq R$ بنابراین R انعکاسی است اگر و فقط اگر $I \subseteq R$ •

(ب) فرض کنیم R متقارن است • در اینصورت داریم :

بنا به متقارن بودن R : $(x,y) \in R \Longleftrightarrow (y,x) \in R$

بنا به ۱۲-۲-۲ : $\Longleftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$

پس $R = R^{-1}$

حال فرض کنیم $R = R^{-1}$ • در اینصورت داریم :

بنابه فرض $R = R^{-1}$: $(x,y) \in R \Longleftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$

بنا به ۱۲-۲-۲ : $\Longleftrightarrow (y,x) \in R$

پس R متقارن است •

(ج) فرض کنیم R انتقالی است • در اینصورت داریم :

بنابه ۲۴-۲-۲ : $(x,z) \in R \circ R \Longrightarrow \exists y\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\big)$

بنابه انتقالی بودن R : $\Longrightarrow (x,z) \in R$

پس $R \circ R \subseteq R$.

حال فرض کنیم $R \circ R \subseteq R$، در اینصورت داریم :

بنابه ۲۴-۲-۲ : $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R \circ R$

بنا به فرض $R \circ R \subseteq R$: $\Longrightarrow (x,z) \in R$

پس R انتقالی است •

(د) فرض کنیم R متقارن و انتقالی است • در اینصورت بنا به (ب) و (ج) داریم $R = R^{-1}$ و $R \circ R \subseteq R$ و در نتیجه $R^{-1} \circ R \subseteq R$ • نشان می‌دهیم که $R \subseteq R^{-1} \circ R$ •

فرض کنیم $(x,y) \in R$ • چون R متقارن است پس $(y,x) \in R$ • چون R انتقالی است و $(x,y) \in R$ و $(y,x) \in R$ پس $(y,y) \in R$ و در نتیجه $(y,y) \in R^{-1}$ • حال با داشتن $(x,y) \in R$ و $(y,y) \in R^{-1}$ ، بنابه ۲۴-۲-۲، نتیجه می‌شود که $(x,y) \in R^{-1} \circ R$.

پس $R \subseteq R^{-1} \circ R$ و در نتیجه $R = R^{-1} \circ R$ •

حال فرض کنیم $R^{-1}\circ R=R$ • نشان می‌دهیم که R متقارن است •

بنا به فرض $R^{-1}\circ R=R$: $(x,y)\in R \Longrightarrow (x,y)\in R^{-1}\circ R$

بنابه ۲۴-۲-۲ : $\Longrightarrow \exists u((x,u)\in R \wedge (u,y)\in R^{-1})$

بنابه ۱۲-۲-۲ : $\Longrightarrow \exists u((u,x)\in R^{-1} \wedge (y,u)\in R)$

بنا به ۲۴-۲-۲ : $\Longrightarrow (y,x)\in R^{-1}\circ R$

بنابه فرض $R^{-1}\circ R = R$: $\Longrightarrow (y,x)\in R$

نشان می‌دهیم که R انتقالی است • چون R متقارن است پس بنا به (ب) $R=R^{-1}$ ،
چون $R^{-1}\circ R=R$ پس $R\circ R=R$ و بنا به (ج) ، R انتقالی است • بنابراین R متقارن و انتقالی است •

<u>۶-۱-۴ : تمرین :</u>

(الف) مثالی از یک رابطه انعکاسی R روی یک مجموعه A ارائه کنید بطوریکه $R\neq I$ ، که در آن $I=\{(x,x)\mid x\in A\}$.

(ب) مثالی از یک رابطه انتقالی R روی یک مجموعه ارائه کنید بطوریکه $R\circ R\neq R$ •

(ج) فرض کنید A یک مجموعه و $\mathcal{Q}$ مجموعه ای غیر تهی از روابط انتقالی روی A باشد• آیا $\cap\mathcal{Q}$ یک رابطه انتقالی روی A است ؟ آیا $\cup\mathcal{Q}$ یک رابطه انتقالی روی A است؟

<u>۷-۱-۴ : تمرین :</u>

فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه A است • ثابت کنید که :

(الف) $R\cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارن شامل R است • (راهنمایی : باید نشان دهید که ابتدا $R\cup R^{-1}$ یک رابطه متقارن شامل R است و سپس اگر S یک رابطه متقارن شامل R باشد، آنگاه $R\cup R^{-1}\subseteq S$) •

(ب) $R\cap R^{-1}$ بزرگترین رابطه متقارن داخل R است• (راهنمایی : باید نشان دهید که ابتدا $R\cap R^{-1}$ یک رابطه متقارن داخل R می‌باشد و سپس اگر S یک رابطه متقارن داخل R باشد ، آنگاه $S\subseteq R\cap R^{-1}$) •

تذکــر :

فرض کنیم Pxy یك گزاره نمای دو متغیره با مجموعه جهانی A باشد • دراینصورت مجموعه جواب این گزاره نما عبارتست از مجموعه همه x و y ها در A بطوریکه به ازای آنها گزاره نمای Pxy بیك گزاره درست تبدیل می‌شود ، بعبارت دیگر اگر R مجموعـــــه جواب Pxy باشد آنگاه داریم :

$$R=\{(x,y)\mid x,y\in A\wedge Pxy\}$$

ملاحظه می‌شود که $R\subseteq A\times A$ و در نتیجه R یك رابطه روی مجموعه A است • بنابرایـــن مجموعه جواب یك گزاره نمای دو متغیره ، رابطه ای روی مجموعه جهانی آن گزاره نمـــا است • در اینجا ملاحظه می‌شود که اگر گزاره نمای Pxy مشخص باشد ، آنگاه رابطـــه R مشخص است و معمولاً بجای بیان R برحسب زیر مجموعه ای از $A\times A$ ، می‌تـــوان آنرا بصورت زیر بیان کرد :

$$xRy\Longleftrightarrow(x,y\in A\wedge Pxy)$$

در صورتیکه مجموعه جهانی A مشخص باشد و احتمال اشتباهی نباشد ، آنگاه می‌تـوان R را بصورت ساده تر زیر بیان نمود :

$$xRy\Longleftrightarrow Pxy$$

۸-۱-٤ : مثال :

روی $\mathbb{Z}$ رابطه R را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\wedge x\neq 0\wedge\exists n(n\in\mathbb{Z}\wedge y=nx)\}$$

در اینجا ملاحظه می‌شود که گزاره نمای دو متغیره وابسته به R عبارتست از :

$$x\neq 0\wedge\exists n(n\in\mathbb{Z}\wedge y=nx)$$

پس رابطه R را میتوان بصورت زیر تعریف کرد :

$$xRy\Longleftrightarrow(x,y\in\mathbb{Z}\wedge x\neq 0\wedge\exists n(n\in\mathbb{Z}\wedge y=nx))$$

در این مثال مجموعه جهانی وابسته به گزاره نمای مورد بحث ، $\mathbb{Z}$ است و می‌توان رابطه R را بصورت ساده تر زیر تعریف نمود :

$$xRy\Longleftrightarrow(x\neq 0\wedge\exists n(n\in\mathbb{Z}\wedge y=nx))$$

در واقع رابطه R همان رابطه تقسیم پذیری در $\mathbb{Z}$ است • نشان می‌دهیم که رابطه R

روی $\mathbb{Z}$ ، انتقالی است ولی انعکاس ومتقارن نیست ٠

فرض کنیم $x,y,z\in\mathbb{Z}$ و داشته باشیم xRy و yRz ٠ در اینصورت $x\neq o$ و $y\neq o$ و اعداد صحیح m و n وجود دارند بطوریکه $y=mx$ و $z=ny$ در اینصورت $z=(nm)x$ و در نتیجه داریم xRz ٠ پس R انتقالی است ٠ چون $(o,o)\notin R$ پس R روی $\mathbb{Z}$ انعکاس نیست ٠ همچنین چون $(۲,۴)\in R$ و $(۴,۲)\notin R$ پس R متقارن نیست ٠

در این مثال ملاحظه میشودکه اگر x یك عدد صحیح غیر صفر باشدآنگاه xRx ، زیرا که $x=1x$ ٠ پس فقط وقتی که $x=o$ ، داریم $(x,x)\notin R$ ٠ ولی با همه این تفاصیل R روی $\mathbb{Z}$ انعکاس نیست ، زیرا که برای انعکاس بودن یك رابطه روی یك مجوعـــه لازم است که هر یكاز عناصرآن مجموعه با خودش در رابطه باشد ٠ در این مثال ملاحظـــه میشـود که عدد ٥ با خودش در رابطه نیست ٠

۹-۱-٤ : مثال :

فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعه جهانی وابسته به گزاره نمای زیر باشد :

$x-y$ مضرب صحیحی از ۲π است ٠

رابطه R را روی $\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$xRy \Longleftrightarrow x-y \text{ مضرب صحیحی از } ۲\pi \text{ است}$$

در اینصورت R یك رابطه انعکاس ، متقارن و انتقالی است ٠ زیرا که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $x-x=o(۲\pi)$ و در نتیجه xRx ، اگر داشته باشیم xRy ، آنگاه $n\in\mathbb{Z}$ وجود داردبطوریکه $x-y=n(۲\pi)$ و در نتیجه $y-x=(-n)(۲\pi)$ که نتیجه میدهد yRx ٠ اگر داشته باشیـــم xRy و yRz آنگاه اعداد صحیح m و n وجود دارند بطوریکـــــه $x-y=m(۲\pi)$ و $y-z=n(۲\pi)$ و در نتیجه $x-z=(m+n)(۲\pi)$ که نتیجه میدهد xRz ٠ بنابراین R روی $\mathbb{R}$ انعکاس ، متقارن و انتقالی است ٠

۱۰-۱-٤ : مثال :

فرض کنیم P مجموعه همه نقاط روی یك صفحه باشد ٠ در این صفحه یك دستگـــاه مختصات دکارتی به مبدأ o را در نظر میگیریم ٠ رابطه R را روی $P-\{o\}$ بصورت زیر تعریف

می‌کنیـم :

x و y روی خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد قرار دارند $\Longleftrightarrow x R y$

در اینصورت R، انعکاس ، متقارن و انتقالی است. این مطلب را در زیر اثبات می‌کنیم :

برای هر $x \in P-\{o\}$ ، x روی خطی که از x و مبداء مختصات می‌گذرد ، قراردارد بنابراین برای هر $x \in P-\{o\}$ و داریم xRx . اگر داشته باشیم xRy ، آنگاه x و y روی خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد قرار دارندو در نتیجه y و x نیز روی همین خط قرار دارندکه نتیجه می‌دهد yRx. اگر داشته باشیم xRy و yRz آنگاه x و y روی خطی که از o می‌گذرد قرار دارندوهمچنین y و z روی خطی که از o می‌گذرد قرار دارنـد . چون این دو خط دو نقطه مشترك y و o دارند ، پس برهم منطبق هستندودر نتیجـه x و z روی این خط قرار دارند . پس داریم xRz . بنابراین R ، انعکاس ، متقارن و انتقالی است .

۱۱-۱-٤ : تمـرین :

در هریك از بند های زیر تعیین کنیدکه آیا رابطه مربوطه‌انعکاس ، متقارن یـــا انتقالی می‌باشدیا خیر.

(الف) رابطه R روی $\mathbb{R}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$xRy \Longleftrightarrow |x| \leq |y|$$

(ب) رابطه R روی $\mathbb{R}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$xRy \Longleftrightarrow x^2+y^2=1$$

(ج) رابطه R روی $\mathbb{Z}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$xRy \Longleftrightarrow x^2+x=y^2+y$$

(د) رابطه R روی $\mathcal{P}(A)$ که بصورت زیر تعریف می‌شودکه درآن A یك مجموعه غیرتهی است :

$$XRY \Longleftrightarrow X \subseteq Y$$

(هـ) رابطه R روی P که بصورت زیر تعریف می‌شود :

x و y روی محیط دایره ای بمرکز مبداء مختصات قراردارند $\Longleftrightarrow xRy$

دراینجا P مجموعه همه نقاط روی یك صفحه است و در این صفحه یك دستگاه مختصات دکارتی در نظرگرفته شده است .

۱۲-۱-٤ : تمرین :

مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید • مثالی از هریك از روابط زیر روی A ارائه دهید •

(الف) R رابطه ای انعکاسی و متقارن است ولی انتقالی نیست •

(ب) R رابطه ای متقارن و انتقالی است ولی انعکاسی نیست •

(ج) R رابطه ای انعکاسی و انتقالی است ولی متقارن نیست •

(د) R انعکاسی ، متقارن و انتقالی نیست •

۱۳-۱-٤ : تعریف :

رابطه R روی یك مجموعه A را یك رابطه هم ارزی می‌نامیم اگر R روی A انعکاسی متقارن و انتقالی باشد •

۱٤-۱-٤ : مثال :

(الف) در ۲-۱-٤ (الف) ملاحظه می‌شودکه $R_{۴}$ یك رابطه هم ارزی است • همچنین رابطه R در ۲-۱-٤ (ب) یك رابطه هم ارزی است •

(ب) رابطه R در ۹-۱-٤ یك رابطه هم ارزی است •

(ج) رابطه R در ۱۰-۱-٤ یك رابطه هم ارزی است •

(د) رابطه R در ۱۱-۱-٤ (هـ) یك رابطه هم ارزی است •

(هـ) فرض کنیم A یك مجموعه باشد •رابطه $I=\{(x,x)|x\in A\}$ را روی A در نظر می‌گیریم • همانطوریکه در ابتدای این قسمت دیدیم I یك رابطه هم ارزی روی A است •این رابطه را رابطه همانی روی A می‌نامیم•

۱۵-۱-٤ : تمرین :

فرض کنید A یك مجموعه و R یك رابطه روی A باشد • اگر I رابطه همانی روی A باشد ، آنگاه نشان دهیدکه $I\circ R=R\circ I=R$ •

نمادگذاری :

برای نمایش یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه معمولاً از نماد $\sim$ استفاده خواهیم کرد •

۱۶-۱-٤ : تمرین :

در هریک از بند های زیر نشان دهید که رابطه $\sim$ روی مجموعه مربوطه یک رابطه هم ارزی است •

(الف) روی $\mathbb{Z}$ بصورت زیر :

$x \sim y \iff$ $x-y$ مضربی از ۲ باشد

(ب) فرض کنید S مجموعه همه نقاط فضا باشد • یک دستگاه مختصات سه بعدی را در S در نظر بگیرید • حال رابطه $\sim$ روی S بصورت زیر تعریف میشود :

$u \sim v \iff$ u و v روی محیط کره ای بمرکز مبدأ مختصات قرار دارند

(ج) مانند بند (ب) فرض کنید S مجموعه همه نقاط فضا باشد و یک دستگاه مختصات سه بعدی xyz در S در نظر بگیرید • در اینصورت رابطه $\sim$ روی S بصورت زیر تعریف میشود :

$u \sim v \iff$ u و v روی صفحه ای موازی صفحه xy قرار دارند

۱۷-۱-٤ : تمرین :

فرض کنید $\mathcal{R}$ مجموعه ای از روابط هم ارزی روی مجموعه A است • نشان دهید که $\cap\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی A است•

۱۸-۱-٤ : تعریف :

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد •رابطه $\sim$ را روی $\mathbb{Z}$ بصورت زیر تعریف میکنیم :

$x \sim y \iff$ $x-y$ مضربی از n باشد

در اینصورت $\sim$ را رابطه هم نهشتی بسنج n می نامیم و با نماد $\equiv_n$ نمایش میدهیم •

بنابراین :

$x-y$ مضربی از n باشد $\Longleftrightarrow x \equiv_n y$

همچنین نماد $x \equiv y \pmod{n}$ نیز بجای $x \equiv_n y$ بکار برده می‌شود •

در ٤-١-١٦ (الف) ملاحظه میشود که رابطه $\sim$ رابطه هم نهشتی بسنج ۲ است که یك رابطه هم ارزی می‌باشد • بطور کلی قضیه زیر را داریم :

١٩-١-٤ : قضیه :

برای هر عدد طبیعی n رابطه هم نهشتی بسنج n روی $\mathbb{Z}$ یك رابطه هم ارزی است •

٢٠-١-٤ : تمرین : ١٩-١-٤ را اثبات کنید •

تذکر :

روابط هم نهشتی روی $\mathbb{Z}$ دسته مهمی از روابط هم ارزی را تشکیل می‌دهند و بخصوص در نظریه اعداد بکار برده می‌شوند •

٢١-١-٤ : تعریف :

فرض کنیم $\sim$ یك رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد و $a,b \in A$ اگر $a \sim b$، آنگاه a را هم ارز b می‌نامیم •

٢٢-١-٤ : تعریف :

فرض کنیم $\sim$ یك رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد و $a \in A$ • در اینصورت کلاس هم ارزی a که با نماد $a/\sim$ (یا $[a]$) نمایش داده می‌شود ، عبارتست از مجموعه همه عناصر A که هم ارز a هستند • بعبارت دیگر :

$$a/_{\sim} = \{x \mid x \in A \wedge x \sim a\}$$

البته چون یك رابطه هم ارزی، متقارن است پس داریم :

$$a/_{\sim} = \{x \mid x \in A \wedge a \sim x\}$$

۴-۱-۲۰ : مثال :

(الف) رابطه هم ارزی R_4 در ۳۱-۲-۲ را در نظر می‌گیریم ۰ در اینصورت داریم :

$$a/_{R_4}=\{a\},\ b/_{R_4}=\{b\},\ c/_{R_4}=\{c\},\ d/_{R_4}=\{d\},\ e/_{R_4}=\{e\}$$

(ب) رابطه هم ارزی $\sim$ در ۱۵-۱-۴ (ب) را در نظر می‌گیریم ۰ اگر u نقطه ای در S به مختصات $(0,0,1)$ باشد آنگاه کلاس هم ارزی u مجموعه همه نقاطی است که روی محیط کره ای به مرکز مبداء مختصات و شعاع ۱ قرار دارند ۰ بعبارت دیگر :

$$u/_{\sim}=\{(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in S\wedge x^2+y^2+z^2=1\}$$

(ج) رابطه هم نهشتی بسنج ۲ روی $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم ۰ در اینصورت داریم :

$$[0]=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge x\sim 0\}$$
$$=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\ \wedge\ x-0=x \text{ مضرب از ۲ است}\}$$
$$=\{2n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$$

بعبارت دیگر کلاس هم ارزی 0 مجموعه همه اعداد زوج در $\mathbb{Z}$ می‌باشد ۰ همچنین

$$[1]=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge x\sim 1\}$$
$$=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge x-1 \text{ مضرب از ۲ است}\}$$
$$=\{2n+1\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$$

بعبارت دیگر کلاس هم ارزی ۱ مجموعه همه اعداد فرد در $\mathbb{Z}$ می‌باشد ۰

۴-۱-۲۱ : تمرین :

رابطه $\sim$ را در ۱۰-۱-۴ در نظر بگیرید ۰ در اینصورت کلاسهای هم ارزی نقاط زیر را مشخص کنید ۰

(الف) نقطه p به مختصات (۱و۲)۰

(ب) نقطه q به مختصات (۰و۱)۰

(ج) نقطه r به مختصات (۱و۰)۰

(د) نقطه s به مختصات (۲و۴)۰

۲۲-۱-٤ : قضیه :

فرض کنیم $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد و a و $b \in A$ · در اینصورت a هم ارز b است اگر و فقط اگر کلاس هم ارزی a مساوی کلاس هم ارزی b باشد ، بعبارت دیگر داریم :

$$a \sim b \Longleftrightarrow a/_{\sim} = b/_{\sim}$$

اثبات :

فرض کنیم $a \sim b$. نشان می‌دهیم که $a/_{\sim} = b/_{\sim}$ · فرض کنیم $x \in a/_{\sim}$ · در اینصورت $x \sim a$ · چون $a \sim b$ و $\sim$ انتقالی است پس $x \in b/_{\sim}$ و در نتیجه $a/_{\sim} \subseteq b/_{\sim}$ · بطریق مشابه ثابت می‌شود $b/_{\sim} \subseteq a/_{\sim}$ و در نتیجه $a/_{\sim} = b/_{\sim}$ ·

حال فرض کنیم $a/_{\sim} = b/_{\sim}$ نشان می‌دهیم که $a \sim b$ · چون $\sim$ انعکاسی است پس $a \sim a$ و در نتیجه $a \in a/_{\sim}$ · چون $a/_{\sim} = b/_{\sim}$ پس $a \in b/_{\sim}$ و در نتیجه $a \sim b$.

تذکر: ۲۲-۱-٤ را می‌توان بصورت معادل زیر بیان کرد :

$$\neg(a \sim b) \Longleftrightarrow \neg(a/_{\sim} = b/_{\sim})$$

یا

$$a \nsim b \Longleftrightarrow a/_{\sim} \neq b/_{\sim}$$

بعبارت دیگر a هم ارز b نیست اگر و فقط اگر کلاسهای هم ارزی a و b متفاوت باشد·

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر $a \nsim b$ آنگاه نه تنها $a/_{\sim} \neq b/_{\sim}$ بلکه $a/_{\sim} \cap b/_{\sim} = \phi$

۲۳-۱-٤ : قضیه :

فرض کنیم $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد و a و $b \in A$ · در اینصورت داریم :

$$a \nsim b \Longleftrightarrow a/_{\sim} \cap b/_{\sim} = \phi$$

اثبات :

فرض کنیم $a \not\sim b$ • توسط برهان خلف نشان می دهیم که $a/_{\sim} \cap b/_{\sim} = \phi$ • فرض کنیم $a/_{\sim} \cap b/_{\sim} \neq \phi$ • در اینصورت عنصر x در A وجود دارد بطوریکه $x \in a/_{\sim} \cap b/_{\sim}$ • در اینصورت $x \in a/_{\sim}$ و $x \in b/_{\sim}$ • در اینصورت $x \sim a$ و $x \sim b$ • چون $\sim$ متقارن است ، پس $a \sim x$ • حال چون $a \sim x$ ، $x \sim b$ و $\sim$ انتقالی است ، پس $a \sim b$ که با فرض $a \not\sim b$ متناقض است • بنابراین $a/_{\sim} \cap b/_{\sim} = \phi$ •

حال فرض کنیم $a/_{\sim} \cap b/_{\sim} = \phi$ • در اینصورت $a/_{\sim} \neq b/_{\sim}$ و در نتیجه بنابه تذکر فوق $a \not\sim b$ •

۲۴-۱-٤ : مثال :

(الف) رابطه $\sim$ را در ۱٦-۱-٤ (ج) در نظر می گیریم • نقاط u به مختصات (۱, ۳, ۲) و v به مختصات (۱, ٤, ۲-) هر دو روی صفحه ای موازی صفحه xy که فاصله آن از صفحه xy مساوی ۱ است قرار دارند و در نتیجه $u \sim v$ • بنابراین $[u] = [v]$ • در واقع کلاس هم ارزی u یا v همان صفحه ای است که موازی صفحه xy است و فاصله اش از صفحه xy مساوی ۱ می باشد •

(ب) رابطه را در ٤•۱•۱٦(ب) در نظر می گیریم • نقطه u به مختصات (۱, ۰, ۰) روی محیط کره ای به مرکز مبدا مختصات وشعاع ۱ قرار دارد ونقطه v به مختصات (۲, ۰, ۰) روی محیط کره ای به مرکز مبدا مختصات وشعاع ۲ قرار دارد • روشن است که محیط ها ی این دو کره ای هیچ نقطه مشترکی ندارد و در نتیجه $u \not\sim v$ •

تذکر :

اگر $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A و I رابطه همانی روی A باشند آنگاه بنا به ۵-۱-٤ (الف) ، $I \subseteq \sim$ • تمرین زیر نشان می دهد که یک شرط لازم و کافی برای اینکه تساوی $I = \sim$ برقرار باشد این است که کلاس هم ارزی هر عنصر A یک مجموعه تک عنصری باشد •

۲۵-۱-٤ : تمرین :

فرض کنید $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A و I رابطه همانی روی A باشند نشان دهید ، $\sim = I$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x/_{\sim} = \{x\}$

۲٦-۱-٤ : تعریف:

فرض کنیم $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد • در اینصورت مجموعه خارج قسمت A روی $\sim$ که با نماد $A/_{\sim}$ نمایش داده می‌شود ، عبارتست از مجموعه همه کلاسهای هم ارزی عناصر A • بعبارت دیگر :

$$A/_{\sim} = \{ x/_{\sim} \mid x \in A \}$$

۲۷-۱-٤ : قضیه :

فرض کنیم $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه غیر تهی A باشد • در اینصورت داریم :

(الف) هر عنصر $A/_{\sim}$ غیر تهی است ، بعبارت دیگر داریم :

$$\forall X (X \in A/_{\sim} \Longrightarrow X \neq \phi)$$

(ب) هر دو عنصر مختلف $A/_{\sim}$ عنصر مشترکی ندارند ، بعبارت دیگر داریم :

$$\forall X \forall Y (X, Y \in A/_{\sim} \wedge X \neq Y \Longrightarrow X \cap Y = \phi)$$

(ج) اجتماع همه عناصر $A/_{\sim}$ مساوی A است ، بعبارت دیگر داریم :

$$\bigcup A/_{\sim} = A$$

اثبات :

(الف) برای هر $x \in A$ ، چون $\sim$ انعکاسی است پس $x \sim x$ و در نتیجه $x \in x/_{\sim}$. پس برای هر $x \in A$ داریم $x/_{\sim} \neq \phi$

(ب) از ۲۲-۱-٤ نتیجه می‌شود •

(ج) فرض کنیم $x \in \bigcup A/_{\sim}$ در اینصورت $X \in A/_{\sim}$ وجود دارد بطوریکه $x \in X$ •

چون X یک کلاس هم ارزی است پس $X \subseteq A$ و در نتیجه $x \in A$ ۰

حال فرض کنیم $x \in A$ ۰ چون $x \in x/_\sim$ و $x/_\sim \in A/_\sim$ ، پس $x \in \bigcup A/_\sim$ ۰ بنابراین $\bigcup A/_\sim = A$ ۰

تذکر:

اگر $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد ، آنگاه از ۲۷-۱-۴ نتیجه می‌شود که عناصر مجموعه خارج قسمت $A/_\sim$ ، مجموعه A را به زیر مجموعه های مجزا تقسیم می‌کند ۰

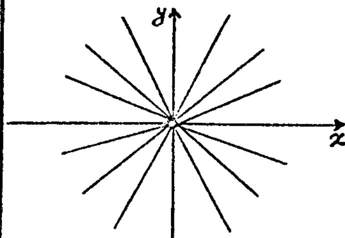
۲۸-۱-۴ : مثال :

(الف) در ۲۰-۱-۴ (الف) ملاحظه کردیم که کلاسهای هم ارزی R_4 عبارتند از $\{a\}$، $\{b\}$، $\{c\}$، $\{d\}$ و $\{e\}$ بنابراین داریم :

$$A/_{R_4} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$$

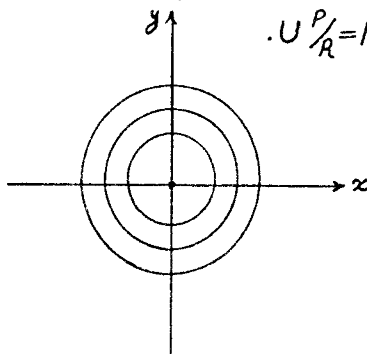
ملاحظه می‌شود که هر عنصر $A/_{R_4}$ غیر تهی است ، اشتراک هر دو عنصر متمایز $A/_{R_4}$ تهی است ، و $\bigcup A/_{R_4} = A$ ۰

(ب) رابطه R را در ۱۰-۱-۴ در نظر می‌گیریم ۰ دیدیم که این رابطه یک رابطه هم ارزی است ۰ در این مثال کلاسهای هم ارزی عبارتند از همه خطوطی که از مبداء می گذرند و شامل مبدا مختصات نیستند ۰بنابراین $P-\{0\}/_R$ مجموعه همه این خطوط می‌باشد ملاحظه می‌شود که هرعنصر $P-\{0\}/_R$ غیرتهی است ، اشتراک هر دو عنصر متمایز $P-\{0\}/_R$ تهی است ، و $\bigcup P-\{0\}/_R = P-\{0\}$



(ج) رابطه R را در ۱۱-۱-۴ (هـ) در نظر می‌گیریم ۰ دیدیم که R یک رابطه

هم ارزی روی P است • اگر o مرکز مبدأ مختصات باشد، آنگاه کلاس هم ارزی o مساوی $\{o\}$ است و اگر این کلاس هم ارزی را دایره ای به مرکز o و شعاع صفر در نظر بگیریم آنگاه همه کلاسهای هم ارزی، دوایری به مرکز o خواهند بود • بنابراین P/R مجموعه همه این دوایر است • ملاحظه می‌شود که هر عنصر P/R غیر تهی است، اشتراک هر دو عنصر متمایز P/R تهی است، و $\cup P/R = P$.



(د) فرض کنیم n یك عدد طبیعی باشد • رابطه هم نهشتی به سنج n روی $\mathbb{Z}$ یعنی $\equiv_n$ را در نظر می‌گیریم • با استفاده از قضیه ای در نظریه اعداد که به آلگوریتم تقسیم در $\mathbb{Z}$ معروف است می‌توان نتیجه گرفت که همه کلاسهای هم ارزی وابسته به رابطه $\equiv_n$ عبارتند از:

$$[0], [1], \ldots, [n-1]$$

آلگوریتم تقسیم می‌گوید که برای هر $x \in \mathbb{Z}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ اعداد یکتای $q \in \mathbb{Z}$ و $r \in \mathbb{Z}$ وجود دارند بطوریکه $x = nq + r$ و $0 \leqslant r < n$. در اینجا از اثبات این قضیه صرفنظر می‌کنیم •

بنابه این قضیه برای هر $x \in \mathbb{Z}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ اعداد یکتای $q \in \mathbb{Z}$ و $r \in \mathbb{Z}$ وجود دارند بطوری که $x - r = nq$ ، $0 \leq r < n$ • یابرای هر $x \in \mathbb{Z}$ عدد یکتای $r \in \mathbb{Z}$ وجود دارد بطوری که $[x] = [r]$ و $0 \leq r < n$ • بنابراین همه کلاسهای هم‌ارزی متمایز وابسته به رابطه $\equiv$ عبارتند از:

$$[0], [1], \ldots, [n-1]$$

پس داریم:

$$\mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

معمولاً $\mathbb{Z}/\equiv_n$ را با نماد $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهند • در حالت خاص اگر $n = 2$، آنگاه $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ • در ۲۰-۱-٤ (ج)، دیدیم که $[0]$ مجموعه همه اعداد زوج و $[1]$

مجموعه همه اعداد فرد است. پس در این حالت کاملاً روشن است که :

$$[0] \neq \phi \wedge [1] \neq \phi \text{ و } [0] \cap [1] = \phi \text{ و } \cup \mathbb{Z}_2 = [0] \cup [1] = \mathbb{Z}$$

۲۹-۱-٤ : تمریـــن :

(الف) مجموعه خارج قسمت $S/\sim$ را در ۱٦-۱-٤ (ب)، مشخص نمائید.

(ب) مجموعه خارج قسمت $S/\sim$ را در ۱٦-۱-٤ (ج)، مشخص نمائید.

۳۰-۱-٤ : تعریف :

فرض کنیم $\sim$ یك رابطه ارزی روی مجموعه A باشد. در اینصورت تابع $f: A \to A/\sim$ بطوریکه $f(\alpha) = \alpha/\sim$ برای هر $\alpha \in A$، تابع طبیعی از A به مجموعه خارج قسمت $A/\sim$ نامیده می‌شود.

۳۱-۱-٤ : مثال :

(الف) در ۲۸-۱-٤ (الف) ملاحظه شد که :

$$A/R_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$$

بنابراین تابع طبیعی از A به A/R_4 بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$f: A \longrightarrow A/R_4$$
$$f(x) = \{x\}$$

(ب) رابطه هم نهشتی به سنج ۲ روی $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. در ۲۸-۱-٤ (د) ملاحظه شد که مجموعه خارج قسمت $\mathbb{Z}_2$ فقط شامل دو عنصر $[0]$ و $[1]$ است که در آن $[0]$ مجموعه اعداد زوج و $[1]$ مجموعه اعداد فرد می‌باشد. در اینصورت تابع طبیعی از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}_2$ بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$f(x) = \begin{cases} [0] & \text{اگر } x \text{ زوج باشد،} \\ [1] & \text{اگر } x \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

۴-۱-۳۲ : قضیه :

فرض کنیم $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A و f تابع طبیعی از A به $A/\sim$ باشد در اینصورت f پوشاست • بعلاوه عبارت زیر معادلند :

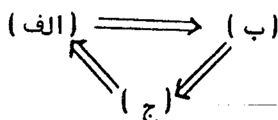
(الف) f یک بیکاست •

(ب) رابطه $\sim$ ، رابطه همانی روی A است •

(ج) برای هر $x \in A$ داریم $f(x)=\{x\}$ •

اثبات :

روشن است که برای هر $X \in A/\sim$ عنصر $\alpha \in A$ وجود دارد بطوریکه $X = \alpha/\sim$ • پس $f(\alpha)=\alpha/\sim = X$ و در نتیجه f پوشاست • حال ثابت می‌کنیم که بند های (الف)، (ب)، و (ج) معادلند • برای اینکار مطابق شکل زیر اثبات می‌کنیم :



(ب) $\Longleftarrow$ (الف)

فرض کنیم f یک بیک است • اگر I رابطه همانی روی A باشد ، آنگاه می‌دانیم که $I \subseteq \sim$ • نشان می‌دهیم که $\sim \subseteq I$ • فرض کنیم $(x,y) \in \sim$ یعنی $x \sim y$ • دراینصورت بنا به ۴-۱-۲۲ ، $x/\sim = y/\sim$ و در نتیجه $f(x)=f(y)$ • چون f یک بیک است پس $x=y$ و در نتیجه $(x,y) \in I$ • بنابراین $\sim = I$ •

(ج) $\Longleftarrow$ (ب)

فرض کنیم رابطه $\sim$ ، رابطه همانی روی A باشد • در اینصورت بنابه ۴-۱-۲۵ برای هر $x \in A$ داریم $x/\sim = \{x\}$ • پس برای هر $x \in A$ داریم $f(x)=\{x\}$.

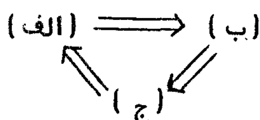
(الف) $\Longleftarrow$ (ج)

فرض کنیم برای هر $x \in A$ داریم $f(x)=\{x\}$ نشان می‌دهیم که f یک بیک است •

فرض کنیم $f(y)=f(x)$ • در اینصورت $\{x\}=\{y\}$ و در نتیجه $x=y$ • پس f یك بیك است •

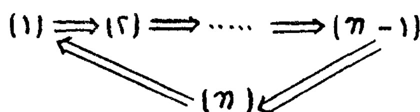
تذکــر:

در اثبات قضیه فوق ملاحظه کردیم که برای اثبات معادل بودن بند های (الف)، (ب) و (ج) مطابق شکل زیر عمل کردیم :



از این اثبات نتیجه می‌شودکه هر بندی، بند دیگر را نتیجه می‌دهد • مثلاً چون (ب) نتیجه می‌دهد (ج) و (ج) نتیجه می‌دهد (الف) پس (ب) نتیجه می‌دهـــد (الف) • همچنین چون (ج) نتیجه می‌دهد (الف) و (الف) نتیجه می‌دهد (ب) پس (ج) نتیجه می‌دهد (ب) •

بطور کلی اگر در قضیه ای آمده باشدکه بند های (۱)، (۲)،......، (n) معادلند باید اثباتی که برای معادل بودن این بند ها ارائه می‌شود، طوری باشدکه هربندی، بند دیگری را نتیجه دهد • معمولاً کمترین اثبات مطابق شکل زیر بدست می‌آید :



اگر مطابق این شکل اثبات ارائه شود آنگاه هربند، بند دیگری را نتیجه می‌دهد.
شکل زیر طریقه دیگری برای اثبات معادل بودن بند های (۱) الی (n) است :



۳۲-۱-٤ : تمرین :

فرض کنید f یك تابع روی مجموعه A باشد • رابطه $\sim$ را روی A بصورت زیـــر تعریف کنیـــد :

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x)=f(y)$$

نشان دهید که $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی A است وبرای هر $x \in A$ داریم :

$x/_{\sim}=f^{-1}[\{f(x)\}]$.بعلاوه اگر g تابع طبیعی از A به $A/_{\sim}$ باشد ، آنگاه ثابت کنید که عبارات زیر معادلند :

(الف) f یک بیک است •

(ب) برای هر $x \in A$ داریم $x/_{\sim}=\{x\}$ •

(ج) رابطه $\sim$ ، رابطه همانی روی A است •

(د) g یک بیک است •

۲-٤ : افـــراز

از ۲۷-۱-٤ نتیجه شد که اگر $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه غیر تهی A باشد ، آنگاه مجموعه خارج قسمت $A/_{\sim}$ ، مجموعه A را به زیر مجموعه های مجزاوغیـــر تهی تقسیم می‌کند • در این قسمت این پدیده را بطورمجرد تعریف می‌کنیم و آنرا مــــورد بررسی قرار دهیم •

۱-۲-٤ : تعریف :

فرض کنیم A یک مجموعه غیر تهی باشد • در اینصورت زیر مجموعه $\mathbb{P}$ از $\mathcal{P}(A)$ یک افراز A نامیده می‌شود اگر داشته باشیم :

(الف) هر عنصر $\mathbb{P}$ غیرتهی باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$\forall X (X\in \mathbb{P} \Longrightarrow X\neq \phi)$$

(ب) هر دو عنصر متمایز $\mathbb{P}$ عنصر مشترکی نداشته باشند ، یعنی داشته باشیم :

$$\forall X \forall Y (X,Y\in \mathbb{P} \wedge X\neq Y \Longrightarrow X\cap Y=\phi)$$

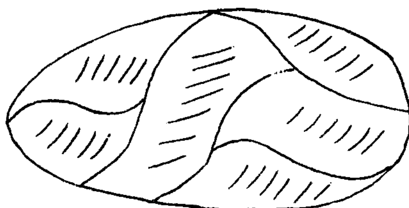
(ج) اجتماع $\mathbb{P}$ مساوی A باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$\cup \mathbb{P}=A$$

تذکـر :

اگر مجموعه A مجموعه همه نقاط داخل شکل زیر باشد ، آنگاه تقسیم بنـدی آن

بصورت زیر یك افراز A است •



در شکل فوق هر ناحیه هاشور زده شده یك عنصر افراز است• البته کاملاً روشـــن است که یك مجموعه غیر تهی را می‌توان به طرق مختلف افراز کرد •

از ۴-۱-۲۷ و ۴-۲-۱ نتیجه زیر را داریم :

<u>۴-۲-۲ : نتیجه :</u>

اگر $\sim$ یك رابطه هم ارزی روی مجموعه غیر تهی A باشد ، آنگاه $A/_\sim$ یك افـراز اســت •

<u>۴-۲-۳ : مثال :</u>

مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ و زیر مجموعه $\mathbb{P}=\{\{a,e\},\{c\},\{b,d\}\}$ از $\mathcal{P}(A)$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت $\mathbb{P}$ یك افراز A است ، زیرا که هر عنصر $\mathbb{P}$ غیر تهی است ، اشتراك هر دو عنصر متمایز $\mathbb{P}$ مساوی تهی است و $\cup\mathbb{P}=A$• همچنین مجمــوعـــه $\{\{a\},\{b,e\},\{c\},\{d\}\}$ نیز یك افراز A می‌باشد •

<u>۴-۲-۴ : تمرین :</u>

(الف) کدامیك از مجموعه های زیر یك افراز مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ است ؟

$$\mathbb{P}_1=\{\{a\},\{f,b\},\{c,g,e\}\}$$

$$\mathbb{P}_2=\{\{a,g\},\{b,c,f\},\{d,e,c\}\}$$

$$\mathbb{P}_3=\{\{a,e\},\{d,f,g\},\phi\{c,b\}\}$$

$$\mathbb{P}_4 = \{\{a, g\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$$

(ب) برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، فرض کنیم $X_n = \{\frac{n}{m} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0\}$ آیا مجموعه $\mathbb{P} = \{X_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ یک افراز $\mathbb{Q}$ است ؟

(ج) برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنیم $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$. آیا مجموعه $\mathbb{P} = \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک افراز $\mathbb{Z}$ است .

۵-۲-٤ : قضیه :

فرض کنیم A یک مجموعه غیر تهی و $\mathbb{P}$ یک افراز A باشد . رابطه $\sim$ روی A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists X (X \in \mathbb{P} \wedge x, y \in X)$$

در اینصورت داریم :

(الف) $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی A است .

(ب) $A/_{\sim} = \mathbb{P}$

اثبات :

(الف) اگر $x \in A$ ، آنگاه چون $\bigcup \mathbb{P} = A$ پس $X \in \mathbb{P}$ وجود دارد بطوریکه $x \in X$ و درنتیجه $x, x \in X$ و بنابه تعریف $\sim$ ، $x \sim x$. پس $\sim$ انعکاسی است . فرض کنیم $x, y \in A$ و $x \sim y$. دراینصورت X در $\mathbb{P}$ وجود دارد بطوریکه $x, y \in X$ و درنتیجه $y, x \in X$ ، یعنی $y \sim x$. پس $\sim$ متقارن است . فرض کنیم $x, y, z \in A$ و $x \sim y$ و $y \sim z$. دراینصورت X و Y در $\mathbb{P}$ وجود دارند بطوریکه $x, y \in X$ و $y, z \in Y$ چون $y \in X \cap Y$ پس $X \cap Y \neq \phi$ وچون $\mathbb{P}$ یک افراز A است پس $Y = X$ و درنتیجه $x, z \in X$ که نتیجه می‌دهد $x \sim z$. پس $\sim$ انتقالی است .

بنابراین $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی A است .

(ب) فرض کنیم $X \in A/_{\sim}$. دراینصورت $a \in A$ وجود دارد بطوریکه $X = a/_{\sim}$ چون $a \in a/_{\sim}$ پس $a \sim a$ و درنتیجه $Y \in \mathbb{P}$ وجود دارد بطوریکه $a \in Y$. نشان می‌دهیم که

$Y=X$. اگر $x \in X$ آنگاه چون $x \sim \alpha$ ، پس $Z \in \mathbb{P}$ وجود دارد بطوریکه $x \in Z$ و α.چون $\alpha \in Y \cap Z$ و $\mathbb{P}$ یك افراز A است پس $Z=Y$ و در نتیجه $x \in Y$.اگر $x \in Y$ آنگاه چون $x \in Y$ و α پس $x \sim \alpha$ و در نتیجه $x \in \alpha/\sim$ ، یعنی $x \in X$.پس $X=Y$ و در نتیجه $X \in \mathbb{P}$.

حال فرض کنیم $X \in \mathbb{P}$.چون $\mathbb{P}$ یك افراز A است پس $X \neq \phi$ و در نتیجه عنصر $\alpha \in A$ وجود دارد بطوریکه $\alpha \in X$.نشان می‌دهیم که $X=\alpha/\sim$.اگر $x \in X$ ، آنگاه چون $x \in X$ و α پس $x \sim \alpha$ و در نتیجه $x \in \alpha/\sim$.اگر $x \in \alpha/\sim$ آنگاه $x \sim \alpha$ و در نتیجه $Y \in \mathbb{P}$ وجود دارد بطوریکه $x \in Y$ و α.چون $\alpha \in X \cap Y$ و $\mathbb{P}$ یك افراز A است پس $Y=X$ و در نتیجه $x \in X$.بنا براین $\alpha/\sim = X$ و در نتیجه $X \in A/\sim$.پس $\mathbb{P}=A/\sim$.

<u>۴-۲-۶ : تمرین :</u>

در قضیه فوق ثابت کنید که رابطه $\sim$ توسط بند های (الف) و (ب) بطور یکتا تعیین می‌گردد . بعبارت دیگر ثابت کنید که اگر $\approx$ یك رابطه هم ارزی روی A باشد بطوریکه $\mathbb{P}=A/\approx$ آنگاه $\sim = \approx$.

<u>۴-۲-۷ : تعریف:</u>

فرض کنیم A یك مجموعه غیر تهی و $\mathbb{P}$ یك افراز A باشد . در اینصورت رابطه هم ارزی $\sim$ در ۴-۲-۵ رابطه هم ارزی وابسته به افراز $\mathbb{P}$ نامیده می‌شود .

<u>۴-۲-۸ : مثال :</u>

(الف) مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ و افراز $\mathbb{P}=\{\{a,b\},\{c,f\},\{d\},\{e\}\}$ از A را در نظر می‌گیریم . در اینصورت رابطه هم ارزی $\sim$ روی A وابسته به افراز $\mathbb{P}$ توسط جدول زیر تعریف می‌شود :

$\sim$	a	b	c	d	e	f
a	۱	۱	۰	۰	۰	۰
b	۱	۱	۰	۰	۰	۰
c	۰	۰	۱	۰	۰	۱
d	۰	۰	۰	۱	۰	۰
e	۰	۰	۰	۰	۱	۰
f	۰	۰	۱	۰	۰	۱

ملاحظه می‌شود که $\mathbb{P} = A/_{\sim}$.

(ب) مجموعه همه خطوط واقع در یک صفحه را با L نمایش می‌دهیم • اگر $l \in L$ آنگاه مجموعه همه خطوطی را که موازی l هستند با L_l نشان می‌دهیم • در حالت خاص فرض می‌کنیم که خط l با خودش موازی است • بعبارت دیگر برای هر l فرض کنیم $l \in L_l$. در اینصورت $\mathbb{P} = \{L_l \mid l \in L\}$ یک افراز L است • زیرا که چون $l \in L_l$ پس هر L_l غیر تهی است ، اگر L_l و $L_{l'}$ دو عنصر متمایز $\mathbb{P}$ باشند آنگاه l موازی l' نیست و در اینصورت $L_l \cap L_{l'} = \phi$ ؛ همچنین داریم $\cup \mathbb{P} = L$.
حال رابطه هم ارزی $\sim$ روی L وابسته به افراز $\mathbb{P}$ همان رابطه توازی است که در ۲-۱-٤ (ب) آمده است •

<u>تذکــر:</u>

از ۲-۲-٤ و ۵-۲-٤ نتیجه می‌شود که به ازاء هر رابطه هم ارزی $\sim$ روی یک مجموعه غیر تهی A یک افراز $\mathbb{P}$ وجود دارد بطوریکه $\mathbb{P} = A/_{\sim}$ و برعکس بازاء هر افراز $\mathbb{P}$ از A یک رابطه هم ارزی $\sim$ روی A وجود دارد بطوریکه $\mathbb{P} = A/_{\sim}$.

<u>۹-۲-٤ : تمرین :</u>

(الف) مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و رابطه $\sim$ روی A را که توسط جدول زیر تعریف می‌شود ، در نظر بگیرید •

~	a	b	c	d	e	f	g	h
a	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
b	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
c	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
d	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
e	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
f	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰
g	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
h	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱

مجموعه رابطه ~ را بنویسید • نشان دهید که ~ یك رابطه هم ارزی روی A است وسپس مجموعه خارج قسمت $A/\sim$ را مشخص نمائید •

(ب) مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و افراز $\mathbb{P} = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴\}, \{۵\}\}$ از A را در نظر بگیرید • جدول رابطه هم ارزی ~ وابسته به افراز $\mathbb{P}$ را تشکیل دهیـد و تحقیق کنید که $\mathbb{P} = A/\sim$ •

(ج) مجموعه همه گزاره ها را با P نمایش می دهیم • رابطه ~ را روی P بصورت زیـر تعریف کنید :

$$p \sim q \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$$

نشان دهید که ~ یك رابطه هم ارزی روی P است و سپس مجموعه خارج قسمـت $P/\sim$ را مشخص کنیـد •

<u>۳-۴ : روابط ترتیبـی</u>

رابطه R را روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$x R y \Longleftrightarrow x \leq y$$

در اینصورت R دارای خواص زیر است :

(الف) برای هر $x \in \mathbb{N}$ می دانیم که $x \leq x$ پس برای هر $x \in \mathbb{N}$ داریم $x R x$.

(ب) برای هر $x, y \in \mathbb{N}$ اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$ • بنابراین برای هـر $x, y \in \mathbb{N}$ اگر $x R y$ و $y R x$ آنگاه $x = y$ •

(ج) برای هر $x, y, z \in \mathbb{N}$ اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant z$ آنگاه $x \leqslant z$. بنابراین برای هر $x, y, z \in \mathbb{N}$ اگر xRy و yRz آنگاه xRz.

بنابراین رابطه فوق انعکاس و انتقالی است. خاصیت (ب) را در زیر بطور مجرد تعریف می‌کنیم :

۱-۳-٤ : تعریف :

رابطه R روی مجموعه A یك رابطه نامتقارن نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$، xRy و yRx نتیجه بدهد $x = y$.

۲-۳-٤ : مثال :

همانطوریکه در بالا ملاحظه شد رابطه کوچکتر یا مساوی بودن روی مجموعه ای از اعداد یك رابطه نامتقارن است.

۳-۳-٤ : تعریف :

رابطه R روی مجموعه A یك رابطه ترتیبی جزئی نامیده می‌شود اگر R روی A، انعکاس، نامتقارن و انتقالی باشد.

٤-۳-٤ : مثال :

(الف) همانطوریکه در ابتدای این قسمت دیدیم، رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{N}$ یك رابطه ترتیبی جزئی است.

(ب) فرض کنیم A یك مجموعه باشد. رابطه R را روی $\mathcal{P}(A)$ بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$X R Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y$$

در اینصورت R یك رابطه ترتیبی جزئی است. زیرا که، برای هر $X \in \mathcal{P}(A)$ داریم $X \subseteq X$ و در نتیجه $X R X$؛ برای هر $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ اگر $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$، آنگاه $X = Y$ و در نتیجه اگر XRY و YRX، آنگاه $X = Y$؛ برای هر $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$، اگر $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq Z$، آنگاه $X \subseteq Z$ و در نتیجه اگر XRY و YRZ آنگاه XRZ. بنابراین

R یک رابطه ترتیبی جزئی است • از این مثال نتیجه می‌شود که ، در حقیقت $\subseteq$ یک رابطه ترتیبی جزئی روی $\mathcal{P}(A)$ است •

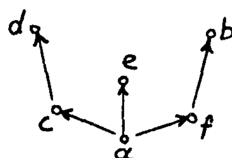
(ج) مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر می‌گیریم و رابطه R را روی A توسط جدول زیر تعریف می‌کنیم •

R	a	b	c	d	e	f
a	۱	۱	۱	۱	۱	۱
b	۰	۱	۰	۰	۰	۰
c	۰	۰	۱	۱	۰	۰
d	۰	۰	۰	۱	۰	۰
e	۰	۰	۰	۰	۱	۰
f	۰	۱	۰	۰	۰	۱

در اینصورت R یک رابطه ، انعکاسی ، نامتقارن و انتقالی است • بنابراین R روی A یک رابطه ترتیبی جزئی می‌باشد •

تذکر:

رابطه ترتیبی جزئی R در ۴-۳-۴ (ج) را می‌توان توسط نمودار زیر نمایش داد:



نمودار R

در نمودار R ، عناصر A توسط نقاطی نشان داده شده‌اند و اگر داشته باشیم xRy و $x\neq y$ و عنصری مانند z در A وجود نداشته باشد بطوریکه داشته باشیم xRz

و xRy، آنگاه از x به y پیکانی رسم شده است و جهت پیکان از x به y است ٠
توجه می‌کنیم که ممکن است برای دو عنصر u و v از A بطوریکه داشته باشیم uRv،
آنگاه دنباله‌ای از پیکانها از u به v رسم شوند ٠ مثلاً برای دو عنصر a و d از A
داریم aRd و دو پیکان بترتیب از a به c و از c به d رسم شده‌اند ٠

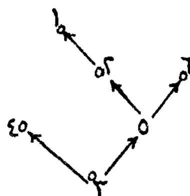
بطور کلی برای هر رابطه ترتیب جزئی روی یک مجموعه متناهی می‌توان نمودار
نظیر نمودار فوق، ترسیم کرد ٠

۵-۳-٤ : مثال :

مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ٤, ۵, ٦\}$ را در نظر می‌گیریم و رابطه R را روی A
توسط جدول زیر تعریف می‌کنیم :

R	۱	۲	۳	٤	۵	٦
۱	۱	٠	٠	٠	٠	٠
۲	۱	۱	٠	٠	٠	٠
۳	۱	۱	۱	۱	۱	۱
٤	٠	٠	٠	۱	٠	٠
۵	۱	۱	٠	٠	۱	۱
٦	٠	٠	٠	٠	٠	۱

در اینصورت R یک رابطه ترتیب جزئی است و می‌توان نمودار زیر را برای R ترسیم نمود ٠



نمادگذاری :

از این پس در این قسمت یک رابطه ترتیب جزئی را با نماد $\preccurlyeq$ (کمی بزرگتر از ی

که کوچکتر یا مساوی بودن معمولی اعداد است) نمایش خواهیم داد •

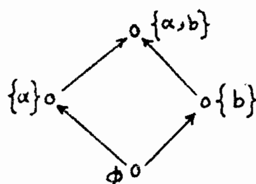
٤-٣-٦ : تعریف :

فرض کنیم $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه A باشد • عناصر x و y متعلق به A را مقایسه پذیر می‌نامیم اگر داشته باشیم $x \leqslant y$ ، یا $y \leqslant x$ • اگر عناصر x و y مقایسه پذیر نباشند ، آنها را مقایسه ناپذیر می‌نامیم •

٤-٣-٧ : مثال :

(الف) رابطه ترتیبی جزئی $\leqslant$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت همه عناصر $\mathbb{N}$ تحت این رابطه مقایسه پذیرند • زیرا که برای هر دو عدد x و y در $\mathbb{N}$ می‌دانیم که $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$ •

(ب) فرض کنیم $A = \{\alpha, b\}$ ، در اینصورت $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{\alpha\}, \{b\}, \{\alpha, b\}\}$ • رابطه ترتیبی جزئی $\subseteq$ را روی $\mathcal{P}(A)$ در نظر می‌گیریم • این رابطه را می‌توان توسط نمودار زیر نمایش داد •



ملاحظه می‌شود که ϕ با همه عناصر دیگر $\mathcal{P}(A)$ مقایسه پذیر است • ولی $\{\alpha\}$ و $\{b\}$ دو عنصر مقایسه ناپذیر می‌باشند • همچنین $\{\alpha\}$ با $\{\alpha, b\}$ و $\{b\}$ با $\{\alpha, b\}$ مقایسه پذیرند •

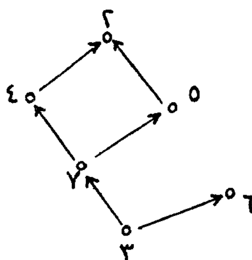
(ج) رابطه ترتیبی جزئی R را در ٤-٣-٤ (ج) در نظر می‌گیریم • ملاحظه می‌شود که α با همه عناصر A مقایسه پذیر است • همچنین c با α و b با f مقایسه پذیرند ولی مثلاً b و α مقایسه ناپذیرند • همچنین b و e مقایسه ناپذیرند •

(د) رابطه ترتیبی جـزیی R را در ٤-٣-٥ در نظر می‌گیریم • تحت این رابطه ۳ بـا همه عناصر A مقایسه پذیر است • همچنین ۵ با ۲، ۱ و ٦ مقایسه پذیر است • دو عنصر ٤ و ٦ مقایسه ناپذیرند • همچنین دو عنصر ٦ و ۲ و دو عنصر ٦ و ۱ مقایسه

ناپذیــرند ٠

<u>۸-۳-٤ : تمریــن :</u>

رابطه $\preccurlyeq$ روی مجموعه $A = \{۱، ۲، ۳، ٤، ٥، ٦، ۷\}$ را توسط نمودار زیــــر تعریف کنیــد :



البته فرض می‌شود که هر عنصر A با خودش تحت رابطه $\preccurlyeq$ مقایسه پذیر است، بعبارت دیگر فرض می‌شود که $\preccurlyeq$ انعکاسی است ٠

(الف) جدول $\preccurlyeq$ را تشکیل دهید ٠

(ب) نشان دهیدکه $\preccurlyeq$ یک رابطه ترتیبی جزیی روی A است٠

(ج) عناصر مقایسه پذیر و مقایسه ناپذیر را تعیین کنید ٠

<u>۹-۳-٤ : تعریف :</u>

فرض کنیم $\preccurlyeq$ یک رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه A باشد ٠ اگر هر دو عنصر A مقایسه پذیر باشند ، آنگاه $\preccurlyeq$ را یک رابطه ترتیبی خطی روی A می‌نامیم٠

<u>۱۰-۳-٤ : مثال :</u>

(الف) همانطوریکه در ۷-۳-٤ (الف) ملاحظه شد ، رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{N}$ یک رابطـه ترتیبی خطی است ٠

(ب) اگر $A = \{\alpha\}$، آنگاه $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{A\}\}$ و نمودار رابطه $\subseteq$ روی $\mathcal{P}(A)$ بصورت زیر اســت ٠



ملاحظه می‌شودکه دوعنصر ϕ و $\{\alpha\}$ مقایسه پذیرند و در نتیجه رابطـه $\subseteq$ روی $\mathcal{P}(A)$ یك رابطه ترتیبی خطی است •

۱۱-۳-٤ : تعریف:

فرض کنیم $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه A باشد •

(الف) عنصر α متعلق به A را کوچکترین عنصر A می‌نامیم اگر برای هر x متعلق به A داشته باشیم $\alpha \leqslant x$ •

(ب) عنصر b متعلق به A را بزرگترین عنصر A می‌نامیم اگر برای هر x متعلق به A داشته باشیم $x \leqslant b$ •

۱۲-۳-٤ : مثال :

(الف) رابطه $\leqslant$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت عدد ۱ کوچکترین عنصر $\mathbb{N}$ است ، زیرا که می‌دانیم $1 \leqslant x$ برای هر $x \in \mathbb{N}$ مجموعه $\mathbb{N}$ دارای بزرگترین عنصـر نیست •

(ب) فرض کنیم A یك مجموعه باشد و رابطه $\subseteq$ را روی $\mathcal{P}(A)$ در نظر می‌گیریم • چون $\phi \subseteq X$ برای هر $X \in \mathcal{P}(A)$ پس ϕ کوچکترین عنصر $\mathcal{P}(A)$ است • همچنیـن چون $X \subseteq A$ برای هر $X \in \mathcal{P}(A)$ پس A بزرگترین عنصر $\mathcal{P}(A)$ است •

(ج) رابطه R در ٤-۳-٤ (ج) را در نظر می‌گیریم • در اینصورت α کوچکترین عنصر A است و A بزرگترین عنصر ندارد •

(د) در ٥-۳-٤، ۲ کوچکترین عنصر A است و A بزرگترین عنصر ندارد •

(هـ) فاصله باز $(0,1)=\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0<x<1\}$ و رابطه $\leqslant$ را روی $(0,1)$ در نظـر می‌گیریم • در اینصورت $(0,1)$ دارای کوچکترین یا بزرگترین عنصر نمی‌باشد •

(و) فاصله باز و بسته $(0,1]=\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0<x\leqslant 1\}$ و رابطه $\leqslant$ را روی $(0,1]$ در نظر

می‌گیریم . در اینصورت ۱ بزرگترین عنصر $[0,1)$ است و $[0,1)$ کوچکترین عنصر ندارد.

(ز) فاصله بسته و باز $(0,1]=\{x \mid x\in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 1\}$ و رابطه $\leqslant$ را روی $(0,1]$ در نظر می‌گیریم . در اینصورت ۰ کوچکترین عنصر $[0,1]$ است و $(0,1]$ بزرگترین عنصر ندارد .

(ح) فاصله بسته $[0,1]=\{x \mid x\in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ و رابطه $\leqslant$ را روی $[0,1]$ در نظر می‌گیریم در اینصورت ۰ کوچکترین عنصر $[0,1]$ و ۱ بزرگترین عنصر $[0,1]$ است .

۴-۳-۱۳ : قضیه :

فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه A باشد . در اینصورت کوچکترین عنصر A و بزرگترین عنصر A در صورت وجود یکتا هستند .

اثبات

نشان می‌دهیم که کوچکترین عنصر A در صورت وجود یکتا است . فرض کنیم α و α' هر دو کوچکترین عناصر A باشند . در اینصورت چون α کوچکترین عنصر A است و $\alpha'\in A$ پس $\alpha \leqslant \alpha'$. همچنین چون α' کوچکترین عنصر A است و $\alpha\in A$ پس $\alpha' \leqslant \alpha$. حال چون $\alpha \leqslant \alpha'$ ، $\alpha' \leqslant \alpha$ و رابطه $\leqslant$ نامتقارن است پس $\alpha=\alpha'$. بنابراین کوچکترین عنصر A در صورت وجود یکتا است.

بطریق مشابه می‌توان ثابت کرد که بزرگترین عنصر A در صورت وجود یکتا است.

۴-۳-۱۴ : تعریف :

فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه A باشد .

(الف) عنصر α در A را یک عنصر می‌نیمال A می‌نامیم اگر در A عنصری مانند x مخالف α وجود نداشته باشد بطوریکه $x \leqslant \alpha$. بعبارت دیگر α یک عنصر می‌نیمال A است اگر برای هر $x\in A$ ، $x \leqslant \alpha$ نتیجه بدهد $x=\alpha$.

(ب) عنصر b در A را یک عنصر ماکسیمال A می‌نامیم اگر در A عنصری مانند x مخالف b وجود نداشته باشد بطوریکه $b \leqslant x$. بعبارت دیگر b یک عنصر ماکسیمال

A است اگر برای هر $x \in A$، $b \leqslant x$ نتیجه بدهد $x=b$ •

۱۵-۳-٤ : مثال :

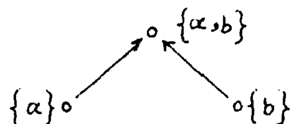
(الف) رابطه $\leqslant$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت عدد ۱ یك عنصر می‌نیمال $\mathbb{N}$ است و $\mathbb{N}$ عنصر ماکسیمال ندارد •

(ب) فرض کنیم A یك مجموعه باشد و رابطه $\subseteq$ را روی $\mathcal{P}(A)$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت ϕ یك عنصر می‌نیمال $\mathcal{P}(A)$ و A یك عنصر ماکسیمال $\mathcal{P}(A)$ است •

(ج) رابطه R را در ٤-۳-٤ (ج) در نظر می‌گیریم • در اینصورت α یك عنصر می‌نیمال A است و b ، α ، e عناصر ماکسیمال A می‌باشند •

(د) در ٥-۳-٤ ، ۳ یك عنصر می‌نیمال A است و ٤ ، ۱ و ٦ عناصر ماکسیمال A می‌باشند •

(هـ) مجموعه $\mathcal{A}=\{\{\alpha\},\{b\},\{\alpha,b\}\}$ و رابطه $\subseteq$ را روی $\mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت نمودار $\subseteq$ بصورت زیر است :



ملاحظه می‌شود که $\{\alpha\}$ و $\{b\}$ هر دو عناصر می‌نیمال A و $\{\alpha,b\}$ یك عنصر ماکسیمال A هستند •

(و) رابطه $\leqslant$ را روی فاصله باز $(0,1)$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت مجموعه $(0,1)$ دارای عنصر می‌نیمال یا عنصر ماکسیمال نیست •

تذکر :

بنابه ۱۲-۳-٤ کوچکترین عنصر و بزرگترین عنصر در صورت وجود یکتا هستند • ولی از مثالهای ۱۵-۳-٤ (ب) و ۱۵-۳-٤ (هـ) نتیجه می‌شود که عناصر ماکسیمال و می‌نیمال در صورت وجود ، لزوماً یکتا نیستند • قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر کوچکترین عنصر و

بزرگترین عنصر وجود داشته باشد آنگاه عناصر می‌نیمال و ماکسیمال وجود دارند و منحصر بفرد می‌باشند ·

۱۶-۳-٤ : قضیه :

فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه A باشد · در اینصورت داریم :

(الف) اگر α کوچکترین عنصر A باشد , آنگاه α تنها عنصر می‌نیمال A است ·

(ب) اگر b بزرگترین عنصر A باشد , آنگاه b تنها عنصر ماکسیمال A است ·

اثبات :

(الف) اگر α کوچکترین عنصر A باشد , آنگاه عنصر x مخالف α در A وجودندارد بطوریکه $x \leqslant \alpha$ و در نتیجه α یک عنصر می‌نیمال A است · بعلاوه اگر α' یک عنصر می‌نیمال A باشد , آنگاه چون α کوچکترین‌عنصر A است پس $\alpha \leqslant \alpha'$ · حال چون α' یک عنصر می‌نیمال A است پس $\alpha = \alpha'$ · بنابراین α تنهاعنصر می‌نیمال A می‌باشد ·

(ب) این بند را بعنوان تمرین اثبات نمائید ·

۱۶-۳-٤ : تمرین

نشان دهید که یک عنصر می‌نیمال لزوماً کوچکترین عنصر نیست · همچنین نشان دهیدکه یک عنصر ماکسیمال لزوماً یک بزرگترین عنصر نیست ·

۱۷-۳-٤ : قضیه :

فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی خطی روی مجموعه A باشد و $b \in A$ و α · دراینصورت داریم :

(الف) α کوچکترین عنصر A است اگر و فقط اگر α یک عنصر می‌نیمال A باشد ·

(ب) b بزرگترین عنصر A است اگر و فقط اگر b یک عنصر ماکسیمال A باشد ·

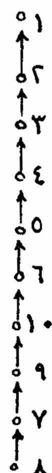
اثبات :

(الف) اگر α کوچکترین عنصر A باشد، همانطوریکه در ۱۶-۳-٤ (الف) دیدیم، α یک عنصر می‌نیمال A است • حال فرض کنیم α یک عنصر می‌نیمال A باشد و نشان می‌دهیم α کوچکترین عنصر A است • چون $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی خطی روی A است، پس برای هر $x \in A$ داریم $\alpha \leqslant x$ یا $x \leqslant \alpha$ • چون α یک عنصر می‌نیمال A است پس x در A مخالف α وجود ندارد بطوریکه $x \leqslant \alpha$ • بنابراین برای هر $x \in A$ داریم $\alpha \leqslant x$ و در نتیجه α کوچکترین عنصر A است •

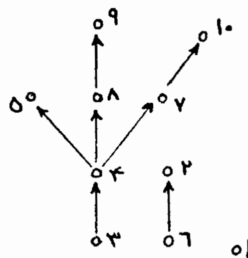
(ب) بعنوان تمرین این بند را ثابت کنید •

۱۸-۳-٤ : تمرین :

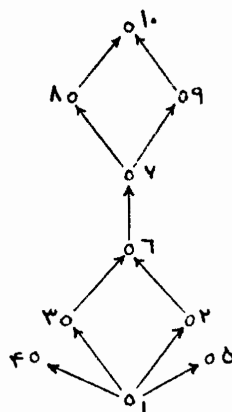
مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ٤, ۵, ٦, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ را درنظر بگیرید • روابط $\leqslant_۱$ و $\leqslant_۲$ و $\leqslant_۳$ را روی A بترتیب توسط نمودارهای زیر تعریف کنید :



نمودار $\leqslant_۱$



نمودار $\leqslant_۲$



نمودار $\leqslant_۳$

همچنین فرض کنید که هرسه رابطه روی A انعکاسی هستند •

(الف) کوچکترین عنصر و بزرگترین عنصر A را نسبت به هریك از روابط فوق ، در صورت وجود تعیین کنید ٠

(ب) عناصر می‌نیمال و ماکسیمال A را نسبت به هر یك از روابط فوق ، در صورت وجود تعیین کنیــد ٠

(ج) کدامیك از روابط فوق ، یك رابطه ترتیبی خطی است ؟

۱۹-۳-٤ : تمرین :

رابطه $\subseteq$ را روی مجموعه زیر در نظر بگیرید ٠

$$\mathcal{A}=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{c\},\{\{a\},\{b\}\},\{a,c\}\}$$

(الف) نمودار رابطه $\subseteq$ را رسم کنید ٠

(ب) کوچکترین عنصر و بزرگترین عنصر A را در صورت وجود ، تعیین کنید ٠

(ج) عناصر می‌نیمال و ماکسیمال A را در صورت وجود ، تعیین کنید ٠

۲۰-۳-٤ : تمرین :

رابطه $\leqslant$ را روی مجموعه $\mathbb{Q}'=\{x/x\in\mathbb{Q}\wedge x\leqslant 0\}$ در نظر بگیرید ٠

(الف) آیا رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{Q}'$ یك رابطه ترتیبی خطی است ؟

(ب) کوچکترین عنصر و بزرگترین عنصر $\mathbb{Q}'$ را در صورت وجود ، تعیین کنید ٠

(ج) عناصر می‌نیمال و ماکسیمال $\mathbb{Q}'$ را در صورت وجود ، تعیین کنید ٠

تذکـر:

فرض کنیم $\leqslant$ یك‌رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه A و $B\subseteq A$ ٠ رابطه $\leqslant'$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x\leqslant' y\Longleftrightarrow(x,y\in B\wedge x\leqslant y)$$

در اینصورت $\leqslant'$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی B است ٠ زیرا که داریم:

برای هر $x\in B$ ، چون $x\in A$ پس $x\leqslant x$ و در نتیجه $x\leqslant' x$ ٠ پس $\leqslant'$ روی B انعکاسی است ٠ برای هر $x,y\in B$ اگر $x\leqslant' y$ و $y\leqslant' x$ ، آنگاه $x\leqslant y$ و $y\leqslant x$ و در نتیجـــه

$x=y$ • پس $\acute{\leqslant}$ روی B نامتقارن است • برای هر $x,y,z\in B$ اگر $x\acute{\leqslant}y$ و $y\leqslant z$، آنگاه $x\leqslant y$ و $y\leqslant z$ و در نتیجه $x\leqslant z$ که نتیجه می‌دهد $x\acute{\leqslant}z$ • پس $\acute{\leqslant}$ روی B انتقالی است • بنابراین $\acute{\leqslant}$ روی B یك رابطه ترتیبی جزیی می‌باشد •

بنابراین اگر یك رابطه ترتیبی جزیی روی یك مجموعه را بصورت فوق روی یك زیر مجموعه آن مجموعه القا نمائیم یك رابطه ترتیبی جزیی روی آن زیر مجموعه بدست می‌آید معمولاً رابطه بدست آمده را با همان نماد رابطه اولی نشان می‌دهند • بنابراین در بالا بجای نوشتن $\acute{\leqslant}$ همان نماد $\leqslant$ را می‌نویسیم و می‌گوئیم رابطه $\leqslant$ را روی B درنظر بگیرید • البته دقت می‌کنیم که در اینصورت عناصر x، y، ... باید در B قرار داشته باشند •

۴۰۳۰۲۱ تمرین

رابطه $\leqslant$ را روی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف کنید :

$$(x,y)\leqslant(x',y') \iff x\leqslant x' \wedge y\leqslant y'$$

(الف) نشان دهید که $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است •

(ب) آیا رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ یك رابطه ترتیبی خطی است ؟ چرا ؟

(ج) نمودار رابطه $\leqslant$ روی زیر مجموعه $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{N}\wedge x+y\leqslant 7\}$ از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را رسم کنید •

(د) کوچکترین عنصر، بزرگترین عنصر و عناصر می‌نیمال و ماکسیمال $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را در صورت وجود، تعیین کنید •

(هـ) کوچکترین عنصر، بزرگترین عنصر و عناصر می‌نیمال و ماکسیمال زیر مجموعه $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{N}\wedge x+y\leqslant 6\}$ را تعیین کنید •

۲۲-۳-۴ : تعریف :

فرض کنیم $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی A باشد و $B\subseteq A$.

(الف) عنصر α در A را یك کران پایین B می‌نامیم ، اگر برای هر $x\in B$ ، داشته باشیم $\alpha\leqslant x$ •

(ب) عنصر c در A را یك کران بالای B می‌نامیم ، اگر برای هر $x\in B$، داشته

باشیم $x \leqslant c$.

۴-۳-۲۳ : مثال :

(الف) رابطه R را در ۴۰۳۰۴ (ج) در نظر میگیریم . در اینصورت b یک کـــران بالای زیر مجموعه $\{a, f\}$ از A میباشد . همچنین d یک کران بالای زیرمجموعه $\{a, c, d\}$ است . اگر زیر مجموعه $\{a\}$ از A را در نظر بگیریم ، آنگاه همه عناصر A کرانهای بالا برای این زیر مجموعه هستند . در این مثال a یک کران پائین زیرمجموعـه مثلاً $\{b, f\}$ است .

(ب) رابطه R را در ۴-۳-۵ در نظر میگیریم . در اینصورت ۳و۵ کرانهای پائیـن زیر مجموعه $\{۶, ۲, ۱\}$ از A هستند . در این مثال مجموعه $\{۶, ۲\}$ کران بالا نـدارد .

(ج) رابطه $\leqslant$ را روی N در نظر میگیریم . اگر زیر مجموعه $\{۱۰۰۰ و ۵۰ و ۲ و ۱\}$ از N را در نظر بگیریم ، آنگاه عدد ۱ یک کران پائین وهمه اعداد بزرگتر یا مساوی ۱۰۰۰ کرانهای بالای این زیر مجموعه هستند .

۴-۳-۲۴ : تمرین :

فرض کنید $\leqslant$ یک رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه A باشد و $a, c \in A$. نشـــان دهیدکـه :

(الف) a کوچکترین عنصر A است اگر و فقط اگر a یک کران پائین A باشد .

(ب) c بزرگترین عنصر A است اگر و فقط اگر c یک کران بالای A باشد .

۴-۳-۲۵ : تعریف :

فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه A باشد و $B \subseteq A$.

(الف) اگر L مجموعه همه کرانهای پائین B باشد ، آنگاه بزرگترین عنصر L درصورت وجود ، بزرگترین کران پائین B نامیده شده و توسط نماد $\inf B$ نمـایـش داده میشود .

(ب) اگر U مجموعه همه کرانهای بالای B باشد، آنگاه کوچکترین عنصر U درصورت وجود، کوچکترین کران بالای B نامیده شده و توسط نماد $\sup B$ نمایش داده می‌شود •

۴-۳-۲۶ : مثال :

(الف) رابطه $\geq$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $B = \{5, 10, 20\}$ • در اینصورت مجموعه همه کرانهای پائین B عبارتست از $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ومجموعه همه کرانهای بالای B عبارتست از $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \geqslant 20\}$ • بنابراین ۵ بزرگترین کران پائین B و ۲۰ کوچکترین کران بالای B می‌باشد، بعبارت دیگر $\inf B = 5$ و $\sup B = 20$ •

(ب) رابطه R را در ۴-۳-۴ (ج) در نظر می‌گیریم • در اینصورت $\inf\{b, f\} = f$، $\sup\{a, b, f\} = b$، $\inf\{e, f\} = a$ و مجموعه $\{e, f\}$ کوچکترین کران بالا ندارد •

(ج) رابطه $\leqslant$ را در ۴-۳-۸ در نظر می‌گیریم • در اینصورت مجموعه $\{1, 3\}$ کوچکترین کران بالا یا بزرگترین کران پائین ندارد •

۴-۳-۲۷ : تمرین :

(الف) فرض کنید $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزئی روی مجموعه A باشد و $a, b \in A$ • نشان دهید که a کوچکترین عنصر A است اگر و فقط اگر $a = \inf A$ • همچنین نشان دهید که b بزرگترین عنصر A است اگر و فقط اگر $b = \sup A$ •

(ب) رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را در ۴-۳-۲۱ و زیر مجموعه $B = \{(2, 3), (3, 2)\}$ از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید • مجموعه همه کرانهای پائین B را تعیین کنید • همچنین بزرگترین کران پائین و کوچکترین کران بالای B را در صورت وجود، تعیین کنید • آیا $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ دارای بزرگترین کران پائین است ؟

(ج) فرض کنید $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزئی روی مجموعه A باشد و $B \subseteq A$ • نشان دهید که $\inf B$ و $\sup B$ در صورت وجود، یکتا هستند •

(د) فرض کنید $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزئی روی مجموعه A باشد و $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$ •

اگر B و C دارای کوچکترین کران بالا باشد ، آیا $B\cup C$ نیز دارای کوچکترین کران بالاست ؟ اگر $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی خطی روی A باشد و $B\cup C$ دارای کوچکترین کران بالا باشد ، آنگاه نشان دهیدکه B یا C دارای کوچکترین کران بالاست •

۴-۳-۲۸ : تعریف :

رابطه R روی مجموعه A یك رابطه ترتیبی جزیی اکیدنامیده می‌شود اگر داشته باشیم :

(الف) R انتقالی باشد ،

(ب) برای هر $x\in A$ ، $(x,x)\notin R$ ؛ بعبارت دیگر اگر I رابطه همانی روی A باشد ، آنگاه $R\cap I=\Phi$ •

۴-۳-۲۹ : مثال :

(الف) رابطه کوچکتر بودن معمولی اعداد روی N یعنی $<$ ، یك رابطه ترتیبی جزیی اکیداست • زیرا که اگر $x<y$ و $y<z$ آنگاه $x<z$ و برای هر $x\in N$ ، $x\nless x$ •

(ب) فرض کنیم A یك مجموعه باشدو مجموعه $\mathcal{P}(A)$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت رابطه $\subset$ روی $\mathcal{P}(A)$ که رابطه زیر مجموعه بودن اکید است ، یك رابطه ترتیبی جزیی اکید می‌باشد • زیرا که ، اگر $X\subset Y$ و $Y\subset Z$ ، آنگاه $X\subset Z$ و برای هر $X\in\mathcal{P}(A)$ ، $X\not\subset X$ •

۴-۳-۳۰ : قضیه :

فرض کنیم R یك رابطه روی مجموعه A و I رابطه همانی روی A باشد •در اینصورت داریم :

(الف) اگر R یك رابطه ترتیبی جزیی روی A باشد ، آنگاه $R-I$ یك رابطه ترتیبی جزیی اکید روی A است •

(ب) اگر R یك رابطه ترتیبی جزیی اکید روی A باشد ، آنگاه $R\cup I$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی A است •

اثبات :

(الف) فرض کنیم R یك رابطه ترتیبی جزیی روی A است ، برای هر $x,y,z\in A$ فرض کنیم $(x,y)\in R-I$ و $(y,z)\in R-I$ • در اینصورت $(x,y)\in R$ ، $(y,z)\in R$ ، $x\neq y$ و $y\neq z$ • چون R انتقالی است $(x,z)\in R$ و بعلاوه $x\neq z$ • زیرا که اگر $x=z$ آنگاه $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ وچون R نامتقارن است پس $x=y$ که یك تناقض است • بنابر این $x\neq z$ و در نتیجه $(x,z)\in R-I$ پس $R-I$ انتقالی است • روشن است که برای هر $x\in A$ داریم $(x,x)\notin R-I$ • بنابراین $R-I$ یك رابطه ترتیبی جزیی اکید روی A می‌باشد •

حال فرض کنیم R یك رابطه ترتیبی جزیی اکید روی A باشد • چون $I\subseteq R\cup I$ پس بنابه ۵-۱-٤ (الف) ، $R\cup I$ یك رابطه انعکاسی است • چون R و I هردو انتقالی هستند پس بنابه ٦-۱-٤ (ج) ، $R\cup I$ انتقالی است • همچنین اگر برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم $(x,y)\in R\cup I$ و $(y,x)\in R\cup I$ آنگاه $x=y$ زیرا که اگر $x\neq y$ آنگاه $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ و چون R انتقالی است پس $(x,x)\in R$ که یك تناقض است • بنابراین $x=y$ و در نتیجه $R\cup I$ یك رابطه نامتقارن است • بنابراین $R\cup I$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی A است •

تذکر :

از قضیه فوق نتیجه می‌شود که از هر رابطه ترتیبی جزیی R روی یك مجموعه A یك رابطه ترتیبی جزیی اکید $S=R-I$ روی A بدست می‌آید و برعکس از هر رابطه ترتیبی جزیی اکید S روی A یك رابطه ترتیبی جزیی $R=S\cup I$ بدست می‌آید • اگر رابطه ترتیبی جزیی را توسط نماد $\preccurlyeq$ نشان دهیم آنگاه رابطه ترتیبی جزیی اکید $\preccurlyeq - I$ را توسط نماد $\prec$ نمایش می‌دهیم •

٤-۳-۳۱ : مثال :

(الف) رابطه $\leqslant$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت داریم :

$$< \;=\; \leqslant - I$$

(ب) فرض کنیم A یك مجموعه باشد و رابطه $\subseteq$ را روی $\mathcal{P}(A)$ در نظر می‌گیریم • در

اینصورت داریم :

$$\subset = \leq - I$$

۴-۳-۳۲ : تمرین :

فرض کنید $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی A باشد و $B \subseteq A$ • نشان دهید که :

(الف) مجموعه همه کرانهای بالای ϕ مساوی A است • همچنین مجموعه همه کرانهای پائین ϕ مساوی A است • سپس نتیجه بگیرید که :

$$\sup A = \inf \phi \text{ و } \inf A = \sup \phi$$

(ب) $\leqslant^{-1}$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی A است •

(ج) اگر نسبت به رابطه $\leqslant$ داشته باشیم $\alpha = \sup B$ ، آنگاه نسبت به رابطه $\leqslant^{-1}$ داریم $\alpha = \inf B$ •

۴-۳-۳۳ : تعریف :

رابطه R روی مجموعه A یك رابطه ترتیبی خطی اکید نامیده میشود اگر داشته باشیم :

(الف) R یك رابطه انتقالی باشد ،

(ب) برای هر $x , y \in A$ دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار باشد :

$$x R y \vee y R x \vee x = y$$

۴-۳-۳۴ : مثال :

رابطه $<$ روی $\mathbb{N}$ یك رابطه ترتیبی خطی اکید است • زیراکه $<$ یك رابطه انتقالی است و برای هر $x , y \in \mathbb{N}$ میدانیم که دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است •

$$x < y \vee y < x \vee x = y$$

۴-۳-۳۵ : تمرین :

فرض کنید R یك رابطه روی مجموعه A و I رابطه همانی روی A باشد • نشان دهید که :

(الف) اگر R ترتیبی خطی اکید روی A باشد ، آنگاه R ترتیبی جزیی اکید روی A است
(ب) اگر R ترتیبی خطی روی A باشد ، آنگاه $R-I$ ترتیبی خطی اکید روی A است •
(ج) اگر R ترتیبی خطی اکید روی A باشد ، آنگاه $R \cup I$ ترتیبی خطی روی A است •

۳٦-۳-٤ : تعریف :

فرض کنیم A یك مجموعه و R یك رابطه روی A باشد •
(الف) اگر R یك رابطه ترتیبی جزیی روی A باشد ، آنگاه A یك مجموعه مرتب جزیی تحت R نامیده می‌شود •
(ب) اگر R یك رابطه ترتیبی خطی روی A باشد ، آنگاه A یك مجموعه مرتب خطی تحت R نامیده می‌شود •

۳۷-۳-٤ : مثال :

(الف) $\mathbb{N}$ یك مجموعه مرتب خطی تحت رابطه $\geqslant$ است•
(ب) اگر A یك مجموعه باشد ، آنگاه $\mathcal{P}(A)$ یك‌مجموعه مرتب جزیی تحت رابطـــه $\subseteq$ اســت •

۳۸-۳-٤ : تمرین :

تمرین رابطه $|$ را روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x \mid y \Longleftrightarrow \exists n(n \in \mathbb{N} \wedge y = nx)$$

(الف) نشان دهید که $\mathbb{N}$ یك مجموعه مرتب جزیی تحت رابطه $|$ است •
(ب) آیا $\mathbb{N}$ یك مجموعه مرتب خطی تحت رابطه $|$ می‌باشد ؟
(ج) زیر مجموعه $A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ از $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید و نمودار رابطه $|$ را روی A ، ترسیم کنیـــد •
(د) جدول رابطه ترتیبی جزیی اکید روی A را که از رابطه ترتیبی جزیی $|$ بدست می آید ، تشکیل دهید •
(هـ) بزرگترین عنصر ، کوچکترین عنصر و عناصر می‌نیمال و ماکسیمال A را در صورت وجود تعیین

کنید ٠

(و) زیر مجموعه $B=\{۱, ۲, ۳\}$ از A را در نظر بگیرید و $\inf B$ و $\sup B$ را درصورت وجود تعیین کنید ٠

<u>۴-۳-۳۹ : تمرین :</u>

نشان دهید که یک مجموعه مرتب جزئی متناهی همیشه دارای عنصر مینیمال و عنصر ماکسیمال است ٠

فصل ۵

اعداد اصلی

این فصل به سه قسمت تقسیم شده است • در قسمت اول هم ارزی مجموعه ها را تعریف می‌کنیم و سپس در رابطه با مجموعه ها ، مفاهیمی نظیر، متناهی ، نامتناهی ، شمارش پذیر و شمارش ناپذیر را معرفی می‌کنیم و مورد بررسی قرار می‌دهیم •در قسمت دوم به هر مجموعه عددی بنام عدد اصلی وابسته می‌کنیم و سپس با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت اول حساب اعداد اصلی را که شبیه حساب اعداد معمولی می‌باشد ، می‌سازیم • در قسمت آخر این فصل اصل انتخاب و برخی‌از اصول معادل آنرا معرفی می‌کنیم •

۱-۵ : هم ارزی مجموعه ها

تابحال با درک ضمنی که ازمفاهیم متناهی و نامتناهی داشته ایم ازمجموعه های متناهی و نامتناهی صحبت کرده ایم • در این قسمت این دو مفهوم بطور دقیق تعریف می‌شوند • در حقیقت تعریف مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی با استفاده از مقایسه مجموعه ها صورت می‌گیرد و مقایسه مجموعه ها بوسیله تابع انجام می‌شود •

۱-۱-۵ : تعریف :

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • در اینصورت ،

(الف) A را هم ارز B می‌نامیم اگر یک تابع دوسویی از A به B وجود داشته باشد و در اینصورت می‌نویسیم :

$$A \sim B$$

اگر A هم ارز B نباشد آنگاه می‌نویسیم :

$$A \not\sim B$$

(ب) اگر یک تابع یک بیک از A به B وجود داشته باشدآنگاه می‌نویسیم :

$$A \leqslant B$$

(ج) اگر $A \leqslant B$ و $A \not\sim B$ آنگاه می‌نویسیم :

$$A < B$$

۲-۱-۵ : مثال :

(الف) فرض کنیم $A = \{۱، ۲، ۳\}$ و $B = \{\phi، \{\phi\}، (\phi، \{\phi\})\}$ • در اینصورت $f : A \to B$ بطوریکه $f(۱) = \phi$ ، $f(۲) = (\phi، \{\phi\})$ و $f(۳) = \{\phi\}$ یک تابع دو سویی از A به B است • بنابراین $A \sim B$ •

(ب) فرض کنیم $A = \{۱، ۲\}$ و $B = \{۱، ۲، ۳\}$ • در اینصورت $f : A \to B$، بطوریکه $f(۱) = ۱$ و $f(۲) = ۲$ یک تابع یک بیک از A به B است • بنابراین $A \leqslant B$ •
بسهولت دیده می‌شود که یک تابع دوسویی از A به B وجود ندارد و در نتیجه $A \not\sim B$ • بنابراین $A < B$ •

(ج) زیر مجموعه های $A = \{۲x | x \in N\}$ و $B = \{۲x-۱ | x \in N\}$ از N را که بترتیب مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد فرد در N می‌باشند ، در نظر می‌گیریم • تعریف می‌کنیم :

$$f : N \longrightarrow A \qquad g : N \longrightarrow B$$
و
$$f(x) = ۲x \qquad g(x) = ۲x - ۱$$

در اینصورت f و g هر دو تابع دو سویی هستند • بنابراین $N \sim A$ و $N \sim B$ •

(د) فرض کنیم a ، b ، c و d اعداد حقیقی باشند و $a < b$ و $c < d$ • فواصل بسته $[a، b]$ و $[c، d]$ را در نظر می‌گیریم و تابع f را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

$$f(x = \frac{d - c}{b - a} x + \frac{bc - ad}{b - a}$$

در اینصورت f یک تابع دوسویی است و در نتیجه $[a، b] \sim [c، d]$ • بنابراین هر

دو فاصله بسته غیرتهی و کراندار از $\mathbb{R}$ هم ارزند •

چون $ran\left(f|(a,b)\right)=(c,d)$، پس از تحدید تابع f روی فاصله باز (a, b) یک تابع دوسویی از (a, b) به (c, d) بدست می‌آید • پس $(a, b)\sim(c, d)$.

بنابراین هردو فاصله باز غیرتهی و کراندار از $\mathbb{R}$ هم ارزند •

(هـ) فاصله باز $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ را در نظر می‌گیریم • در اینصورت تابع زیر یک تابع دوسویی است :

$$f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f(x)=tg\,x$$

بنابراین $\mathbb{R}\sim\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(و) مجموعه $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم و عناصر آنرا بصورت جدول زیر می‌نویسیم :

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

ملاحظه می‌شودکه در سطر اول جدول فوق مؤلفه اول همه زوجهای مرتب عدد ۱ است و مؤلفه دوم آنها بتدریج اضافه می‌شود • در سطر دوم مؤلفه اول همه زوجهای مرتب عدد ۲ است و مؤلفه دوم آنها بتدریج اضافه می‌شود و بهمین صورت در سطرهای بعدی ادامه می‌دهیم . حال مطابق پیکانهای رسم شده در جدول فوق عناصر $\mathbb{N}$ را به عناصر $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نظیر می‌کنیم • مثلاً، ۱ را به $(1, 1)$، ۲ را به $(2, 1)$ ۳ را به $(1, 2)$، ٤ را به $(3, 1)$، ۵ را به $(2, 2)$، ٦ را به $(1, 3)$ و ••• نظیر می‌کنیم • بدین ترتیب یک تابع یک بیک و پوشا از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ بدست می‌آید •

بنابراین $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ •

۳-۱-۵ : قضیه :

فرض کنیم A ، B و C سه مجموعه باشند • در اینصورت داریم :

(الف) $A\sim A$

ب) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$

ج) $A \sim B \wedge B \sim C \Longrightarrow A \sim C$

اثبات :

(الف) بنابه ۲-۲-۳ (ج)، تابع همانی روی A ، τ_A یک تابع دوسویی از A به A است • پس $A \sim A$•

(ب) چون $A \sim B$، پس یک تابع دو سویی از A به B مانند f وجود دارد • بنا به ۳-۲-۲ (ج)، f معکوس پذیر است و بنا به ۲۲-۱-۳ (الف)، f^{-1} یک تابع معکوس پذیر از B به A است • پس f^{-1} یک تابع دوسویی از B به A است و در نتیجه $B \sim A$ •

(ج) چون $A \sim B$ و $B \sim C$ پس توابع دو سویی f و g ، بترتیب از A به B و از B به C وجود دارند • بنا به ٤-۲-۳ تابع $g \circ f$ یک تابع دوسویی از A به C است • پس $A \sim C$•

٤-۱-٥ : مثال :

بنا به ۲-۱-٥ (هـ)، $\mathbb{R} \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$• بنابه ۲-۱-٥ (د)، $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim (0, 1)$.
بنا به ۳-۱-٥ (ج)، $\mathbb{R} \sim (0, 1)$ •

نمادگذاری :

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • در اینصورت مجموعه همه توابع از A به B را با نماد ^{A}B نمایش می‌دهیم ، بعبارت دیگر :

$$^{A}B = \{ f \mid f : A \longrightarrow B \}$$

٥-۱-٥ : قضیه :

فرض کنیم $A \sim B$ و $C \sim D$ • در اینصورت داریم :

(الف) $A \cap C = \Phi \wedge B \cap D = \Phi \Longrightarrow A \cup C \sim B \cup D$

ب) $A\times C \sim B\times D$

ج) $A_C \sim B_D$

<u>اثبات :</u>

چون $A\sim B$ و $C\sim D$، پس توابع دوسویی f و g بترتیب از A به B و از C به D وجود دارند •

(الف) تعریف می‌کنیم :

$$h : A\cup C \longrightarrow B\cup D$$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) \text{ ، اگر } x\in A \\ g(x) \text{ ، اگر } x\in C \end{cases}$$

چون $A\cap C=\phi$ پس h یک تابع است • نشان می‌دهیم که h یک تابع دوسویی است • فرض کنیم $h(x)=h(x')$• در اینصورت $f(x)=f(x')$ یا $g(x)=g(x')$ و چون f و g هردو توابع یک بیك هستند پس در هر حالت $x=x'$ و در نتیجه h یک تابع یک بیك است • فرض کنیم $y\in B\cup D$• در اینصورت $y\in B$ یا $y\in D$ وچون $B\cap D=\Phi$، y نمی‌تواند در هردو باشد اگر $y\in B$ آنگاه چون f پوشاست پس $x\in A$ وجود دارد بطوریکه $y=f(x)$ و در نتیجه $y=h(x)$. اگر $y\in D$ آنگاه چون g پوشاست پس $x\in C$ وجود دارد بطوریکه $y=g(x)$ و در نتیجه $y=h(x)$• پس در هر حالت $x\in A\cup C$ وجود دارد بطوریکه $y=h(x)$ و در نتیجه h پوشاست • بنابراین h یک تابع دوسویی است • پس $A\cup C\sim B\cup D$ •

(ب) تعریف می‌کنیم :

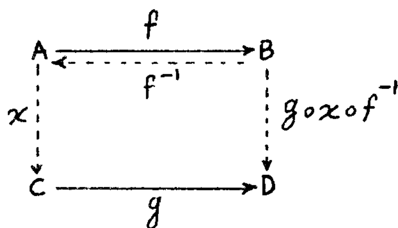
$$h : A\times C \longrightarrow B\times D$$

$$h(x_1 , x_2)=(f(x_1) , g(x_2))$$

در اینصورت بنا به ۶-۲-۳ (ب) ، چون f و g دوسویی هستند ، پس h یک تابع دوسویی است • پس $A\times C\sim B\times D$ •

ج) چون f یک تابع دوسویی است ، پس f^{-1} یک تابع دوسویی از B به A است • اگر $x\in A_C$ یعنی x یک تابع از A به C باشد آنگاه $g\circ x\circ f^{-1}$ یک تابع از B به D است.

شکل زیر این مطلب را بخوبی نشان می‌دهد •

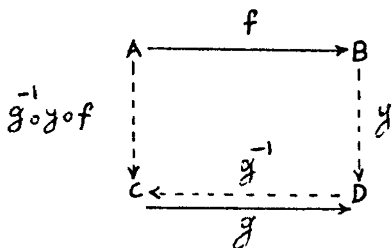


حال باتوجه به مطلب فوق ، تعریف می‌کنیم :

$$h : A_C \longrightarrow B_D$$

$$h(x) = g\circ x\circ f^{-1}$$

نشان می‌دهیم که h یک تابع دوسویی است• فرض کنیم $h(x)=h(x')$ در اینصورت $g\circ x\circ f^{-1}=g\circ x'\circ f^{-1}$. چون g یک بیک است پس بنا به (۱۱-۲-۳ (د) داریم $x\circ f^{-1}=x'\circ f^{-1}$ و چون f^{-1} پوشاست پس بنابه (۱۱-۲-۳ (هـ) داریم $x=x'$ • پس h یک بیک است• اگر $y\in B_D$ ، یعنی y یک تابع از B به D باشد ، آنگاه باتوجه به شکل زیر $g^{-1}\circ y\circ f$ یک تابع از A به C است•



پس اگر $x=g^{-1}\circ y\circ f$ ، آنگاه $x\in A_C$ و بعلاوه داریم :

$$\begin{aligned} h(x) &= g\circ x\circ f^{-1} \\ &= g\circ(g^{-1}\circ y\circ f)\circ f^{-1} \\ &=(g\circ g^{-1})\circ y\circ(f\circ f^{-1}) \\ &= i_D\circ y\circ i_B \\ &= y \end{aligned}$$

در اینجا i_B و i_D بترتیب توابع همانی روی B و روی D هستند • بنابراین h یک تابع

پوشاست و در نتیجه h یک تابع دوسویی است • پس $A_C \sim B_D$.

۵-۱-۶ : تعریف :

فرض کنیم A یک مجموعه باشد • در اینصورت برای هر $X \subseteq A$ تابع مشخصه X بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$f_X : A \longrightarrow \{0 , 1\}$$

$$f_X(\alpha) = \begin{cases} 1 , & \text{اگر } \alpha \in X \\ 0 , & \text{اگر } \alpha \notin X \end{cases}$$

۵-۱-۷ : مثال :

(الف) فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $X = \{1, 3, 5\}$ • در اینصورت تابع مشخصه X عبارتست از: $f_X : A \to \{0 , 1\}$

$$f_X(1) = 1 , \quad f_X(2) = 0 , \quad f_X(3) = 1 , \quad f_X(4) = 0 , \quad f_X(5) = 1$$

(ب) مجموعه N را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم E زیر مجموعه همه اعداد زوج از N باشد • در اینصورت تابع مشخصه X عبارتست از:

$$f_E : N \longrightarrow \{0 , 1\}$$

$$f_E(x) = \begin{cases} 1 , & \text{اگر } x \text{ زوج باشد} \\ 0 , & \text{اگر } x \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

۵-۱-۸ : قضیه :

اگر A یک مجموعه باشد ، آنگاه $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0 , 1\}$ •

اثبات : تعریف می‌کنیم :

$$g : \mathcal{P}(A) \longrightarrow {}^{A}\{0 , 1\}$$

$$g(X) = f_X$$

که در آن f_X ، تابع مشخصه X است • نشان می‌دهیم که g یک تابع دوسویی است • فرض کنیم $g(X) = g(X')$ • در اینصورت $f_X = f_{X'}$ • نشان می‌دهیم $X = X'$ •

بنابه ۵-۱-۷ :
$$x \in X \Longleftrightarrow f_X(x) = 1$$

بنابه تساوی $f_X = f_{X'}$: $\Longleftrightarrow f_{X'}(x) = 1$

بنابه ۷-۱-۵ : $\Longleftrightarrow x \in X'$

پس $X' = X$ و در نتیجه g یک بیک است • حال فرض کنیم $h \in {}^A\{0,1\}$، یعنی h یک تابع از A به $\{0,1\}$ است • فرض کنیم $X = h^{-1}[\{1\}]$ • در اینصورت $X \subseteq A$ و بعلاوه $f_X = h$ ؛ زیرا که $dom\ h = A = dom\ f_X$ و برای هر $x \in A$ داریم :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \text{ اگر} \\ 0 & x \notin X \text{ اگر} \end{cases}$$
$$= h(x)$$

بنابراین $g(X) = f_X = h$ و در نتیجه g پوشاست • پس g یک تابع دوسویی است ودرنتیجه $\mathcal{P}(A) \sim {}^A\{0,1\}$ •

۹-۱-۵ : <u>نتیجه</u> فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • در اینصورت داریم :

$$A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$$

<u>اثبات :</u>

بنابه ۵-۱-۵ (ج) : $A \sim B \Longrightarrow {}^A\{0,1\} \sim {}^B\{0,1\}$

بنابه ۸-۱-۵ و ۳-۱-۵ (ب) و (ج) : $\Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$

<u>۱۰-۱-۵ : مثال :</u>

در این مثال نشان میدهیم که $\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$. میدانیم که در پایه ۲ هرعدد x متعلق به فاصله باز $(0,1)$ از $\mathbb{R}$ را میتوان بصورت $x = 0/x_1x_2 \cdots x_n \cdots$ نوشت ، که در آن هر x_i متعلق به مجموعه $\{0,1\}$ است • برای هر $x = 0/x_1x_2 \cdots x_n \cdots$ در $(0,1)$ تعریف میکنیم $f(x) = g_x$ که درآن g_x یک تابع از $\mathbb{N}$ به $\{0,1\}$ است بطوریکه برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $g_x(i) = x_i$ • در اینصورت f یک تابع از $(0,1)$ به ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ تعریف میکند • نشان میدهیم که f دوسویی است • برای $x = 0/x_1x_2 \cdots x_n \cdots$ و $x' = 0/x'_1x'_2 \cdots x'_n \cdots$ در $(0,1)$ فرض کنیم $f(x) = f(x')$ • در اینصورت $g_x = g_{x'}$ و در نتیجه برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $g_x(i) = g_{x'}(i)$، یعنی برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $x_i = x'_i$ پس $x = x'$ و در نتیجه f یک

بیك است • حال فرض کنیم $h\in {}^{N}\{0,1\}$ اگر $h(i)=x_i$ برای هر $i\in N$، آنگاه $x=/x_1x_2\cdots x_n\cdots$ در $(0,1)$ است و بعلاوه $g_x=h$ ؛ زیرا که $dom\,g_x=dom\,h$ و برای هر $i\in N$ داریم :

$$g_x(i)=x_i$$
$$=h(i)$$

پس $f(x)=g_x=h$ و در نتیجه f پوشاست • بنابراین f دوسویی است و $\{0,1\}^N\sim(0,1)$.
بنابه ۵-۱-٤، $R\sim(0,1)$ و در نتیجه بنابه ۵-۱-۳ (ب) و (ج)، $R\sim{}^{N}\{0,1\}$.

<u>تذکـــر:</u> از مثال فوق، ۵-۱-۸ و ۵-۱-۳ (ب) و (ج) نتیجه می‌شود که :

$$R\sim P(N)$$

<u>نمادگـذاری:</u> قرار می‌دهیم $\bar{0}=\Phi$ و برای هر $n\in N$، $\bar{n}=\{1,\dots,n\}$.

<u>۵-۱-۱۱ : تعریف :</u>

مجموعه A را یك مجموعه متناهی می‌نامیم اگر $A\sim\bar{0}$ یا $n\in N$ وجود داشته باشد بطوریکه $A\sim\bar{n}$• اگر A متناهی نباشد، آنگاه A را یك مجموعه نامتناهی‌می‌نامیم•

<u>۵-۱-۱۲ : مثال :</u>

(الف) فرض کنیم $a\neq b$ • در اینصورت مجموعه های $\{a\}$ و $\{a,b\}$ متناهی هستند، زیرا که روشن است $\{a\}\sim\bar{1}$ و $\{a,b\}\sim\bar{2}$ •

(ب) $\bar{0}$ متناهی است، زیرا که Φ یك تابع دوسویی از Φ به Φ است • بنابراین $\bar{0}\sim\bar{0}$ و در نتیجه $\bar{0}$ متناهی است• همچنین تابع همانی روی $\bar{n}$ یعنی $i_{\bar{n}}$ یك تابع دوسویی از $\bar{n}$ به $\bar{n}$ است • پس $\bar{n}$ یك مجموعه متناهی‌است، برای هر $n\in N$ •

<u>۵-۱-۱۳ : قضیه :</u>

فرض کنیم $A\sim B$ و $a\in A$ و $b\in B$ • در اینصورت $A-\{a\}\sim B-\{b\}$ •

<u>اثبـات :</u> چون $A\sim B$ پس یك تابع دوسویی مانند f از A به B وجود دارد • اگـــر

$f(\alpha)=b$ آنگاه تعریف می‌کنیم :

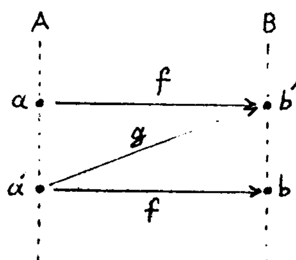
$$g : A-\{\alpha\} \longrightarrow B-\{b\}$$
$$g(x) = f(x)$$

در این صورت g یک تابع دوسویی است. زیرا که اگر $x, x' \in A-\{\alpha\}$ و $g(x)=g(x')$ آنگاه $f(x)=f(x')$ و چون f یک بیک است پس $x=x'$ و در نتیجه g یک بیک است. همچنین اگر $y\in B-\{b\}$ آنگاه $y \in B$ و $y\neq b$ و چون f پوشاست و $f(\alpha)=b$ پس $x \in A$ وجود دارد بطوریکه $x\neq\alpha$ و $f(x)=y$. در اینصورت $x \in A-\{\alpha\}$ و $g(x)=y$ و درنتیجه g پوشاست. پس g دوسویی است. حال فرض کنیم $f(\alpha)\neq b$. در اینصورت $f(\alpha)=b'$ بطوریکه $b' \in B$ و $b'\neq b$. چون f دوسویی است پس $\alpha' \in A$ وجود دارد بطوریکه $\alpha'\neq\alpha$ و $f(\alpha')=b$.

تعریف می‌کنیم :

$$g : A-\{\alpha\} \longrightarrow B-\{b\}$$
$$g(x)=\begin{cases} f(x) , & x\neq\alpha' \text{ اگر} \\ b' , & x=\alpha' \text{ اگر} \end{cases}$$

شکل زیر نحوه ارتباط بین عناصر α ، b ، α' و b' را نشان می‌دهد.



نشان می‌دهیم که g یک تابع دوسویی است. فرض کنیم $x, x' \in A-\{\alpha\}$ و $g(x)=g(x')$. اگر $x=x'=\alpha'$ آنگاه $g(x)=g(x')=b'$. اگر $x=x'$، $g(x)=g(x')\neq b'$ آنگاه $f(x)=f(x')$ و چون f یک بیک است، پس $x=x'$. بنابراین g یک بیک است. اگر $y\in B-\{b\}$ آنگاه $y \in B$ و $y\neq b$ و چون f پوشاست پس $f(\alpha')=b$ پس $x \in A$ وجود دارد بطوریکه $x\neq\alpha'$ و $f(x)=y$. چون $x\neq\alpha'$ پس $g(x)=f(x)$ و در نتیجه $g(x)=y$. پس g پوشاست. بنابراین g دوسویی است و در نتیجه $A-\{\alpha\}\sim B-\{b\}$.

۱۴-۱-۵ : قضیه :

فرض کنیم $m,n\in \mathbb{N}\cup\{0\}$. در اینصورت $\overline{m}\sim\overline{n}$ اگر و فقط اگر $m=n$.

اثبات :

اگر $m=n$ ، آنگاه $\overline{m}=\overline{n}$ و در نتیجه $\overline{m}\sim\overline{n}$ فرض کنیم $\overline{m}\sim\overline{n}$. توسط استقرا روی m، نشان می‌دهیم که $m=n$.

پایه استقرا :

فرض کنیم $m=0$. در اینصورت $\overline{n}\sim\overline{0}$ و در نتیجه یک تابع دوسویی از $\overline{0}$ به $\overline{n}$ وجود دارد. چون $\overline{0}=\phi$ پس باید داشته باشیم $\overline{n}=\phi$ و در نتیجه $\overline{n}=\overline{0}$ ، یعنی $n=0$.

گام استقرا :

فرض کنیم که قضیه برای m برقرار باشد. یعنی اگر $\overline{m}\sim\overline{n}$ آنگاه $m=n$. فرض کنیم $\overline{m+1}\sim\overline{p}$. نشان می‌دهیم که $m+1=p$. چون $m+1\neq 0$ پس $\overline{m+1}\neq\phi$ و در نتیجه $\overline{p}\neq\phi$. در اینصورت $p\in\overline{p}$ و $m+1\in\overline{m+1}$. بنابه ۱۳-۱-۵ داریم :

$$\overline{m+1}-\{m+1\}\sim\overline{p}-\{p\}$$

چون $\overline{m+1}-\{m+1\}=\overline{m}$ و $\overline{p}-\{p\}=\overline{p-1}$ پس $\overline{m}\sim\overline{p-1}$ و در نتیجه بنابه فرض استقرا داریم $m=p-1$. پس $m+1=p$. در اینجا اثبات توسط استقرا کامل می‌شود وقضیه اثبات می‌گردد.

۱۵-۱-۵ : نتیجه :

اگر A یک مجموعه متناهی باشد آنگاه عدد یکتای $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ وجود دارد بطوریکه $A\sim\overline{n}$.

اثبات :

بنابه ۱۱-۱-۵ عدد $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ وجود دارد بطوریکه $A\sim\overline{n}$ فرض کنیم برای

$m\in N\cup\{o\}$ نیز داشته باشیم $A\sim\overline{m}$ در اینصورت بنابه ۳-۱-۵ (ب) و (ج) داریم $\overline{n}\sim\overline{m}$ پس بنا به ۱۴-۱-۵ داریم $m=n$ • بنابراین n یکتاست •

<u>۱۶-۱-۵ : تعریف :</u>

اگر A یك مجموعه متناهی باشد آنگاه عدد A عبارتست از عدد یکتای $n\in N\cup\{o\}$ بطوریکه $A\sim\overline{n}$. عدد A را با نماد $|A|$ نمایش میدهیم •

<u>۱۷-۱-۵ : مثال :</u>

(الف) چون $\{a\}\sim\overline{1}$ پس $|\{a\}|=1$ •

(ب) اگر $a\neq b$، آنگاه $|\{a,b\}|=2$ ، زیرا که $\{a,b\}\sim\overline{2}$ •

(ج) $|\phi|=o$، زیرا که $\phi\sim\overline{o}$

(د) $|\overline{n}|=n$، زیرا که $\overline{n}\sim\overline{n}$ ، برای هر $n\in N$ •

<u>۱۸-۱-۵ : تمرین :</u>

فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند •ثابت کنید که :

$$A\sim B\Longleftrightarrow |A|=|B|$$

<u>۱۹-۱-۵ : قضیه :</u>

فرض کنیم A یك مجموعه متناهی باشد • در اینصورت اگر B یك زیر مجموعه اکید A باشد ، یعنی $B\subset A$، آنگاه B متناهی است و $|B|<|A|$؛ بعبارت دیگر :

$$B\subset A\Longrightarrow |B|<|A|$$

<u>اثبات :</u> توسط استقرا روی $|A|$ قضیه را ثابت میکنیم •

<u>پایه استقرا :</u>

فرض کنیم $|A|=o$• در اینصورت $A=\phi$ و چون ϕ زیر مجموعه اکید ندارد ، پس در این حالت قضیه برقرار است ; بعبارت دیگر چون $B\subset A$ همیشه غلط است پس گزاره $B\subset A\Longrightarrow |B|<|A|$ درست است •

گام استقرا :

فرض کنیم قضیه در مورد همه مجموعه های متناهی باعدد n برقرار باشد • نشان دهیم که قضیه در مورد مجموعه های متناهی باعدد $n+1$ نیز برقرار است • پس فرض کنیم $|A|=n+1$ و $B\subset A$ • در اینصورت عنصر α وجود دارد بطوریکه $\alpha\in A$ و $\alpha\notin B$ • بنابه ۵-۱-۱۳ داریم :

$$A-\{\alpha\}\sim\overline{n+1}-\{n+1\}$$

یا

$$A-\{\alpha\}\sim\overline{n}$$

اگر $B=A-\{\alpha\}$ آنگاه $B\sim\overline{n}$ و درنتیجه $|B|=n$ بنابراین B متناهی است و $|B|<|A|$ •
اگر $B\subset A-\{\alpha\}$ آنگاه بنابه فرض استقرا B متناهی است و $|B|<n<|A|$ • در اینجا قضیه اثبات می‌شود •

۵-۱-۲۰ : نتیجه : یک مجموعه متناهی نمی‌تواند بایک زیر مجموعه اکید خودش هم ارز باشد •

اثبات :

فرض کنیم A یک مجموعه متناهی باشد ، $B\subset A$ و $A\sim B$ • چون $B\subset A$ ، بنا به ۵-۱-۱۹ ، $|B|<|A|$ • چون $A\sim B$ پس بنا به ۵-۱-۱۸ ، $|A|=|B|$ • حاصل یک تناقض است • بنابراین A نمی‌تواند بایک زیر مجموعه اکید خودش ، هم ارز باشد •
از نتیجه فوق بسهولت داریم :

۵-۱-۲۱ : نتیجه :

فرض کنیم A یک مجموعه باشد • اگر A بایک زیر مجموعه اکید خودش هم ارزباشد ، آنگاه A نامتناهی است •

۵-۱-۲۲ : مثال :

(الف) در ۵-۱-۲ (ج) ، دیدیم که $\mathbb{N}$ با مجموعه اعداد زوج که یک زیر مجموعه

اکید خودش است ، هم ارز می‌باشد • پس بنا به ۵-۱-۲۱، $\mathbb{N}$ یک مجموعه نامتناهی است •

(ب) بنابه ۵-۱-۴، $\mathbb{R}$ با $(0,1)$ که یک زیر مجموعه اکید خودش است ، هم ارزمی‌باشد پس $\mathbb{R}$ نامتناهی است •

۵-۱-۲۳ : تمرین : نشان دهیدکه هر زیر مجموعه یک مجموعه متناهی ، متناهی‌است •

۵-۱-۲۴ : قضیه :

عنصر x و مجموعه های متناهی A و B را در نظر می‌گیریم • در اینصورت داریم :

(الف) $A\cup\{x\}$ متناهی است

(ب) $A\cup B$ متناهی است •

(ج) $A\times B$ متناهی است •

(د) A^B متناهی است •

(هـ) $\mathcal{P}(A)$ متناهی است •

اثبات :

(الف) اگر $x\in A$ ، آنگاه $A\cup\{x\}=A$ و در نتیجه $A\cup\{x\}$ متناهی است • فرض کنیم $x\notin A$. چون A متناهی است پس $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ وجود دارد بطوریکه $A\sim\overline{n}$ ودر نتیجه یک تابع دوسویی مانند f از A به $\overline{n}$ وجود دارد • تعریف می‌کنیم :

$$g : A\cup\{x\}\longrightarrow\overline{n+1}$$

$$g(y)=\begin{cases} f(y) , & y\in A \text{ اگر} \\ n+1 , & y=x \text{ اگر} \end{cases}$$

نشان می دهیم که g یک تابع دوسویی است • فرض کنیم $y,y'\in A\cup\{x\}$ و $g(y)=g(y')$• اگر $g(y)=g(y')=n+1$، آنگاه $y=y'=x$• اگر $g(y)=g(y')\neq n+1$، آنگاه $f(y)=f(y')$ و چون f یک بیک است پس $y=y'$.بنابراین g یک بیک است • فرض کنیم $z\in\overline{n+1}$.اگر

$n+1 = z$ آنگاه $g(x)=z$ • اگر $z \neq n+1$ آنگاه $z \in \overline{n}$ و چون f پوشاست پس $y \in A$ وجو د دارد بطوریکه $f(y) = z$ و در نتیجه $g(y)=f(y)=z$• بنابراین g پوشاست • پس g یك تابع دوسویی است • و در نتیجه $A\cup\{x\} \sim \overline{n+1}$• بنابراین $A\cup\{x\}$ متناهی است •

(ب) توسط استقرا روی $|B|$ این بند را اثبات می‌کنیم •

پایه استقرا : اگر $|B|=0$, آنگاه $B=\phi$ و در نتیجه $A\cup B = A$ متناهی است •

گام استقرا :

فرض کنیم که این بند برای همه مجموعه ها با عدد n برقرار باشد • نشان می‌دهیم که این بند برای مجموعه های با عدد $n+1$ نیز برقرار است • پس فرض می‌کنیم $|B| = n+1$• در اینصورت $B\neq\phi$ و عنصر b وجود دارد بطوریکه $b \in B$• بنابه اثبات ۱۹-۱-۵، $|B|-|\{b\}| = n$ و در نتیجه بنا به فرض استقرا مجموعه $A\cup(B-\{b\})$ یك مجموعه متناهی است • حال چون $A\cup B=A\cup(B-\{b\})\cup\{b\}$، پس بنا به بند (الف)، $A\cup B$ یك مجموعه متناهی است • در اینجا اثبات بند (ب) کامل می شود •

(ج) ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $B=\{b\}$، آنگاه $A\times B$ متناهی است • تعریف می‌کنیم :

$$f : A \longrightarrow A\times\{b\}$$
$$f(x)=(x,b)$$

در اینصورت f یك تابع دوسویی است ، زیرا که اگر $x,x'\in A$ و $f(x)=f(x')$ آنگاه $(x,b)=(x',b)$ و در نتیجه $x=x'$ پس f یك بیك است • همچنین اگر $y\in A\times\{b\}$ آنگاه $x\in A$ وجود دارد بطوریکه $y=(x,b)$ و در اینصورت $f(x)=(x,b)=y$• پس f پوشاست• بنابراین f یك تابع دوسویی است و در نتیجه $A\sim A\times\{b\}$• بنابراین $A\times\{b\}$ متناهی است •

حال توسط استقرا روی $|B|$ بند (ج) را اثبات می‌کنیم•

پایه استقرا :

اگر $|B|=0$, آنگاه $B=\phi$ و در نتیجه $A\times B = \phi$ یك مجموعه متناهی است •

گام استقرا :

فرض کنیم بند (ج) برای همه مجموعه های باعدد n برقرار باشد • نشان می‌دهیم که

بند (ج) برای مجموعه های باعدد $n+1$ نیز برقرار است • پس فرض کنیم $|B| = n+1$ • در اینصورت $B \neq \phi$ و در نتیجه عنصر b وجود دارد بطوریکه $b \in B$ • چون $|B - \{b\}| = n$ پس بنا به فرض استقرا $A \times (B - \{b\})$ متناهی است • بنا به ابتدای این بند، $A \times \{b\}$ متناهی است • چون $A \times B = [A \times (B - \{b\})] \cup [A \times \{b\}]$، پس بنا به بند (ب)، $A \times B$ یک مجموعه متناهی است • در اینجا اثبات بند (ج) کامل می‌شود •

(د) ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $A = \{b\}$، آنگاه A_B متناهی است • تعریف می‌کنیم:

$$f : B \longrightarrow {}^{\{\alpha\}}B$$

$$f(x) = g_x$$

که در آن $g_x : \{\alpha\} \to B$ بطوریکه $g_x(\alpha) = x$ • نشان می‌دهیم که f یک تابع دوسویی است • فرض کنیم $x, x' \in B$ و $f(x) = f(x')$ • در اینصورت $g_x = g_{x'}$ و در نتیجه $g_x(\alpha) = g_{x'}(\alpha)$ که نتیجه می‌دهد $x = x'$. پس f یک بیک است • فرض کنیم $h \in {}^{\{\alpha\}}B$، یعنی h یک تابع از $\{\alpha\}$ به B باشد• در اینصورت $h(\alpha) = x$ برای یک $x \in B$ • در اینصورت $g_x = h$، زیرا که $dom\, g_x = dom\, h = \{\alpha\}$ و بعلاوه داریم $g_x(\alpha) = x = h(\alpha)$ • پس $f(x) = g_x = h$ و در نتیجه f پوشاست • بنابراین f دوسویی است و داریم $B \sim {}^{\{\alpha\}}B$ • پس ${}^{\{\alpha\}}B$ متناهی است •

حال بند (د) را توسط استقرا روی $|A|$ اثبات می‌کنیم •

پایه استقرا:

اگر $|A| = 0$، آنگاه $A = \phi$ و در نتیجه $A_B = \{\phi\}$ که نتیجه می‌دهد $A_B \sim$ آ • پس A_B متناهی است•

گام استقرا:

فرض کنیم بند (ج) برای همه مجموعه های باعدد n درست باشد • نشان می‌دهیم

که بند (ج) برای مجموعه های باعدد $n+1$ درست است • پس فرض‌کنیم $|A|=n+1$.
در اینصورت $A \neq \Phi$ و عنصر α وجود دارد بطوریکه $\alpha \in A$ • چون $|A-\{\alpha\}|=n$ ، پس‌بنا به فرض‌استقرا $_B(A-\{\alpha\})$ متناهی است • همچنین بنابه ابتدای این بند $_B\{\alpha\}$ نیز متناهی است • حال نشان می‌دهیم که :

$$A_B \sim (A-\{\alpha\})_B \times \{\alpha\}_B$$

برای هر $f \in A_B$ ، یعنی برای هر تابع f از A به B ، مانند بند (ج) تذکر بعد از ۷-۲-۳، فرض‌می‌کنیم $f|(A-\{\alpha\})$ و $f|\{\alpha\}$ بترتیب تقیید f روی $A-\{\alpha\}$ و $\{\alpha\}$ باشند • حال تعریف می‌کنیم :

$$g : A_B \longrightarrow (A-\{\alpha\})_B \times \{\alpha\}_B$$

$$g(f)=(f|(A-\{\alpha\}), f|\{\alpha\})$$

نشان می‌دهیم که g یک تابع دوسویی است • فرض کنیم $f,f' \in A_B$ و $g(f)=g(f')$ نشان می‌دهیم که $f=f'$ • می‌دانیم که $dom f = dom f' = A$ • چون $g(f)=g(f')$ پس‌داریم :

$$(f|(A-\{\alpha\}), f|\{\alpha\})=(f'|(A-\{\alpha\}), f'|\{\alpha\})$$

و در نتیجه $f|(A-\{\alpha\})=f'|(A-\{\alpha\})$ و $f|\{\alpha\}=f'|\{\alpha\}$. حال‌فرض‌کنیم x یک عنصر دلخواه A باشد • اگر $x=\alpha$ ، آنگاه $(f|\{\alpha\})(x)=(f'|\{\alpha\})(x)$ و در نتیجه $f(x)=f'(x)$ • اگر $x \in A-\{\alpha\}$ ، آنگاه $(f|(A-\{\alpha\}))(x)=(f'|(A-\{\alpha\}))(x)$ و در نتیجه $f(x)=f'(x)$ •
پس‌در هر حالت $f(x)=f'(x)$ و در نتیجه $f=f'$ • پس g یک تابع‌یک بیک است •

فرض کنیم $h \in (A-\{\alpha\})_B \times \{\alpha\}_B$ • در اینصورت $f_1 \in {}^{(A-\{\alpha\})}{}_B$ و $f_2 \in {}^{\{\alpha\}}{}_B$ وجود دارند بطوریکه $h=(f_1, f_2)$ • حال تعریف می‌کنیم :

$$f : A \longrightarrow B$$

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A-\{\alpha\} \text{ اگر} \\ f_2(x), & x=\alpha \text{ اگر} \end{cases}$$

در اینصورت f یک تابع از A به B است بطوریکه $f|(A-\{\alpha\})=f_1$ و $f|\{\alpha\}=f_2$.
در اینصورت داریم :

$$g(f)=(f|(A-\{\alpha\}), f|\{\alpha\})=(f_1, f_2)=h$$

پس g پوشاست و در نتیجه g دوسویی است • بنابراین $A_B \sim {(A-\{\alpha\})}_B \times \{\alpha\}_B$.

چون ${(A-\{\alpha\})}_B$ و $\{\alpha\}_B$ متناهی هستند پس بنا به بند (ج)، ${(A-\{\alpha\})}_B \times \{\alpha\}_B$ متناهی است و در نتیجه A_B متناهی است • در اینجا اثبات بند (د) کامل می شود •

(هـ) بنابه ۸-۱-۵، و در نتیجه $\mathcal{P}(A)\sim {}^{A}\{0,1\}$ بنابه بند (د)، $\mathcal{P}(A)$ یک مجموعه متناهی است •

<u>۲۵-۱-۵ : تمرین :</u>

فرض کنیم A و B دو مجموعه متناهی باشند • نشان دهید که :

(الف) $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$،

(ب) $|A\times B|=|A||B|$ •

(ج) $|{}^{A}B| = |B|^{|A|}$ •

(د) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ •

<u>۲۶-۱-۵ : تعریف :</u> فرض کنیم A یک مجموعه باشد •

(الف) A یک مجموعه بی شمار نامیده می شود , اگر $A \sim \mathbb{N}$ •

(ب) A شمارش پذیر نامیده می شود , اگر A متناهی یا A بی شمار باشد •

(ج) اگر A شمارش پذیر نباشد , آنگاه A شمارش ناپذیر نامیده می شود •

۵-۱-۲۷ : مثال :

(الف) $\mathbb{N}$ بی شمار است , زیرا که $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ • پس $\mathbb{N}$ شمارش پذیر است•

(ب) اگر E مجموعه اعداد زوج در $\mathbb{N}$ باشد , آنگاه E بی شمار است , زیرا که $\mathbb{N} \sim E$ • پس E شمارش پذیر است •

(ج) برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, مجموعه $\overline{n}$ شمارش پذیر است , زیرا که $\overline{n}$ متناهی است •

۵-۱-۲۸ : قضیه : اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ و A نامتناهی باشد , آنگاه A بی شماراست•

اثبات :

چون A نامتناهی است , پس $A \neq \phi$ و چون $A \subseteq \mathbb{N}$ پس A دارای کوچکترین عنصر مانند α_1 است • چون A نامتناهی است , پس $A - \{\alpha_1\} \neq \phi$ و چون $A - \{\alpha_1\} \subseteq \mathbb{N}$ پس $A - \{\alpha_1\}$ دارای کوچکترین عنصر مانند α_2 است • چون A نامتناهی است پس $A - \{\alpha_1 , \alpha_2\} \neq \phi$ وچون $A - \{\alpha_1 , \alpha_2\} \subseteq \mathbb{N}$ پس $A - \{\alpha_1 , \alpha_2\}$ دارای کوچکترین عنصر مانند α_3 است • با ادامه این بحث , برای هر $n \in \mathbb{N}$ چون A نامتناهی است , پس $A - \{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\} \neq \phi$ و چون $A - \{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\} \subseteq \mathbb{N}$ پس دارای کوچکترین عنصر مانند α_{n+1} است • بنابراین $A = \{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n , \ldots\}$ •

حال تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$
$$f(n) = \alpha_n$$

در اینصورت f یك تابع دوسویی است , زیرا که اگر $f(n) = f(m)$ یعنی $\alpha_n = \alpha_m$ ، آنگاه چون کوچکترین عنصر یکتاست پس $m = n$ و در نتیجه f یك بیك است و بعلاوه روشن است که f پوشاست • بنابراین f دوسویی است و $A \sim \mathbb{N}$ ، پس A بی شمار است •

تذکر :

در اثبات قضیه فوق از اصلی بنام اصل خوش ترتیبی استفاده کرده ایم . این اصل می‌گوید که هر زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{N}$ دارای کوچکترین عنصر است. در قسمت آخر این فصل در مورد اصل خوش ترتیبی بیشتر صحبت خواهیم کرد .

۵-۱-۲۹ : نتیجه : اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ ، آنگاه A شمارش پذیر است.

اثبات :

اگر A متناهی باشد ، آنگاه A شمارش پذیر است . اگر A نامتناهی باشد ، آنگاه بنابه ۵-۱-۲۸ ، A بی شمار و در نتیجه شمارش پذیر است . پس در هر حالت A شمارش پذیر است .

۵-۱-۳۰ : نتیجه : هر زیر مجموعه یک مجموعه شمارش پذیر، شمارش‌پذیر است .

اثبات :

فرض کنیم A یک مجموعه شمارش پذیر باشد و $B \subseteq A$. نشان می‌دهیم که B شمارش پذیر است . چون A شمارش پذیر است ، پس A متناهی یا A بی‌شماراست. اگر A متناهی باشد ، آنگاه بنا به ۵-۱-۲۳ ، B متناهی و در نتیجه شمارش پذیر است . فرض کنیم A بی‌شمار باشد. در اینصورت $A \sim \mathbb{N}$ و یک تابع دوسویی مانند f از A به $\mathbb{N}$ وجود دارد . چون f یک تابع دوسویی است پس $B \sim f[B]$. حال $f[B] \subseteq \mathbb{N}$ و در نتیجه بنابه ۵-۱-۲۹ ، $f[B]$ شمارش پذیر است . پس B شمارش پذیر است . بنابراین در هر حالت B شمارش پذیر است.

۵-۱-۳۱ : تمرین : نشان دهید که هر دو مجموعه بی‌شمار، هم ارزند .

۵-۱-۳۲ : قضیه : اگر A یک مجموعه بی‌شمار و B یک مجموعه متناهی باشند ، آنگاه

$A \cup B$ بی‌شمار است.

اثبات :

ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $B=\{b\}$ ، آنگاه $A \cup B$ بی‌شمار است. اگر $b \in A$ ، آنگاه $A \cup B = A$ یک مجموعه بی‌شمار است. پس فرض کنیم $b \notin A$. چون A بی‌شمار است، پس یک تابع دوسویی مانند f از N به A وجود دارد. تعریف می‌کنیم :

$$g : N \longrightarrow A \cup \{b\}$$

$$g(n) = \begin{cases} b \text{ ، } n = 1 & \text{اگر} \\ f(n-1) \text{ ، } n > 1 & \text{اگر} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که g یک تابع دوسویی است. اگر $g(n)=g(n')=b$ ، آنگاه $n = n' = 1$. اگر $g(n)=g(n') \neq b$ آنگاه $f(n-1) = f(n'-1)$ و چون f یک بیک است، پس $n-1 = n'-1$ ، یعنی $n = n'$. پس g یک بیک است. فرض کنیم $x \in A \cup \{b\}$. در اینصورت $x = b$ یا $x \in A$. اگر $x = b$ ، آنگاه $g(1) = b = x$. اگر $x \in A$ ، آنگاه چون f پوشاست پس $m \in N$ وجود دارد بطوریکه $f(m) = x$. حال اگر $n = m+1$ ، آنگاه داریم :

$$g(n) = f(n-1) = f(m) = x$$

پس در هر حالت $n \in N$ وجود دارد بطوریکه $g(n) = x$. پس g پوشاست. بنابراین g دوسویی است و در نتیجه $A \cup \{b\}$ بی‌شمار می‌باشد.

حال توسط استقرا روی $|B|$ ، قضیه را اثبات می‌کنیم.

پایه استقرا :

اگر $|B| = 0$ ، آنگاه $B = \Phi$ و در نتیجه $A \cup B = A$ یک مجموعه بی‌شمار است.

گام استقرا :

فرض کنیم قضیه برای همه مجموعه های با عدد n بر قرار باشد. نشان می‌دهیم

که قضیه برای مجموعه های با عدد $n+1$ نیز برقرار است • پس فرض کنیم $|B| = n+1$ • در اینصورت $B \neq \Phi$ و عصر b وجود دارد بطوریکه $b \in B$ • چون $|B - \{b\}| = n$ پس بنا به فرض استقرا, $A \cup (B - \{b\})$ بی شمار است •
حال چون $A \cup B = A \cup (B - \{b\}) \cup \{b\}$، پس بنا به ابتدای اثبات, $A \cup B$ بی شمار است • در اینجا اثبات قضیه کامل می شود •

تذکـــر:

فرض کنیم $E = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $F = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$، یعنی E و F بترتیب مجموعه های اعداد زوج و اعداد فرد در $\mathbb{N}$ باشند • در اینصورت با استفاده از ۲-۱-۵ (ج) , مجموعه های E و F داریم خواص زیر هستند :

(الف) E و F هردو بی شمارند ;

(ب) $E \cap F = \Phi$ ؛

(ج) $E \cup F = \mathbb{N}$

۲۳-۱-۵ : قضیه :

اگر A و B دو مجموعه بی شمار باشند بطوریکه $A \cap B = \Phi$، آنگاه $A \cup B$ بی شمـار است •

اثبـات :

فرض کنیم E و F بترتیب مجموعه های اعداد زوج و اعداد فرد در $\mathbb{N}$ باشند •بنا به بند (الف) تذکر فوق , E و F بی شمارند • چون A ، B ، E و F بی شمارند , پس بنا به ۳۱-۱-۵, $A \sim E$ و $B \sim F$.چون $A \cap B = \Phi$ و بنا به بند (ب) تذکر فوق $E \cap F = \Phi$, پس بنا به ۵-۱-۵ (الف) , $A \cup B \sim E \cup F$• بنا به بند (ج) تذکر فوق , $E \cup F = \mathbb{N}$ و در نتیجه $A \cup B \sim \mathbb{N}$• بنابراین $A \cup B$ بی شمار است •

۵-۱-۳۴ : نتیجه : اگر A و B دومجموعه بی شمار باشند , آنگاه $A \cup B$ بی شماراست•

اثبـات :

چون $B - A \subseteq B$، پس بنا به ۵-۱-۳۰، $B - A$ شمارش پذیر اسـت ودر نتیجه $B - A$ متناهی یا بی شمار است• اگر $B - A$ متناهی باشد , آنگاه بنا بـــه ۵-۱-۳۲، $A \cup B = A \cup (B - A)$ بی شمار است • فرض کنیم $B - A$ بی شمار باشد • چون $A \cap (B - A) = \Phi$، پس بنابه ۵-۱-۳۳، $A \cup B = A \cup (B - A)$ بی شمار است • پس در هر حالت $A \cup B$ بی شمار است •

۵-۱-۳۵ : قضیه : یك اجتماع متناهی از مجموعه های بی شمار, بی شمار است •

اثبـات :

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یك مجموعه متناهی از مجموعه های بی شمار باشد • نشان می دهیم که $\cup \mathcal{A}$ بی شمار است • توسط استقرا روی $|\mathcal{A}|$ این مطلب را ثابت می‌کنیم•

پایه استقرا :

اگر $|\mathcal{A}| = 1$، یعنی $\mathcal{A} = \{A\}$, آنگاه $\cup \mathcal{A} = A$ یك مجموعه بی شماراست

گام استقرا :

فرض کنیم که این مطلب در مورد همه مجموعه های باعدد n برقرار باشد • نشان می دهیم که در مورد مجموعه های با عدد $n+1$ نیز این مطلب برقرار است • پس فـــرض کنیم $|\mathcal{A}| = n+1$ و $A \in \mathcal{A}$ • در اینصورت $|\mathcal{A} - \{A\}| = n$ و در نتیجه بنا به فرض استقرا $\cup(\mathcal{A} - \{A\})$ یك مجموعه بی شمار است • حال بنابه ۵-۱-۳۴ , مجموعه $\cup \mathcal{A} = \cup(\mathcal{A} - \{A\}) \cup A$ بی شمار است • در اینجا اثبات کامل می شود •

۵-۱-۳۶ : تمرین : نشان دهیدکه یك اجتماع متناهی از مجموعه های متناهی , متناهی است •

۵-۱-۳۷ : نتیجه : یك اجتماع متناهی از مجموعه های شمارش پذیر، شمارش‌پذیر است•

اثبات :

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یك مجموعه متناهی از مجموعه های شمارش پذیر باشد • نشان می دهیم که $\cup\mathcal{A}$ شمارش پذیر است • چون $\mathcal{A}$ متناهی است پس عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $\mathcal{A} \sim \bar{n}$. فرض کنیم f یك تابع دوسویی از $\bar{n}$ به $\mathcal{A}$ باشد و برای هر $i \in \bar{n}$ داشته باشیم $f(i)=A_i$. در اینصورت $\mathcal{A}=\{A_1, \ldots, A_n\}$. اگر همه A_i ها متناهی باشند، آنگاه بنا به ۵-۱-۳۶، مجموعه $\cup\mathcal{A} = \overset{n}{\cup} A_i$ متناهی

و در نتیجه شمارش پذیر است • اگر همه A_i ها بی شمار باشند، آنگاه بنابه ۵-۱-۳۶، مجموعه $\cup\mathcal{A}$ بی شمار و در نتیجه شمارش پذیر است • حال فرض کنیم که پس از تغییر اندیسها در صورت لزوم $A_1, \ldots, A_k$ متناهی و $A_{k+1}, \ldots, A_n$ بی شمار هستند•

در اینصورت بنا به ۵-۱-۳۶، $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ متناهی و بنابه ۵-۱-۳۵، $\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i$ بی شمار است • حال بنا به ۵-۱-۳۲، $\cup\mathcal{A}=\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i\right)$ بی شمار و در نتیجه شمارش‌پذیر است • پس در هر حالت $\cup\mathcal{A}$ شمارش پذیر است •

در زیر نتیجه فوق را برای یك اجتماع شمارش پذیر تعمیم خواهیم داد •یعنی نشان خواهیم داد که یك اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های شمارش پذیر، شمارش‌پذیر است•

۵-۱-۳۸ : قضیه :

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یك مجموعه بی‌شمار از مجموعه های بی شمار باشد، بطوریکه برای هر X و $Y \in \mathcal{A}$ و $X \neq Y$ داشته باشیم $X \cap Y = \phi$ • در اینصورت $\cup\mathcal{A}$ بی شمار است •

اثبات :

چون $\mathcal{A}$ بی شمار است، پس یك تابع دوسویی مانند f از $\mathbb{N}$ به $\mathcal{A}$ وجود دارد•

بنابه فرض برای هر $n \in N$ ، $f(n)$ یك مجموعه بی شمار است و اگر $m \neq n$ ، آنگاه $f(n) \cap f(m) = \Phi$ • چون $f(n)$ بی شمار است ، پس یك تابع دوسویی g_n از N به $f(n)$ وجود دارد • تعریف می‌کنیم :

$$h : N \times N \longrightarrow \cup \mathcal{A}$$

$$h(n, m) = g_n(m)$$

نشان می‌دهیم که h یك تابع دوسویی است • فرض کنیم $h(n,m) = h(n', m')$ • در اینصورت $g_n(m) = g_{n'}(m')$ • حال داریم $g_n(m) \in f(n)$ و $g_{n'}(m') \in f(n')$ و در نتیجه $f(n) \cap f(n') \neq \Phi$. پس $n = n'$ و در نتیجه $g_n(m) = g_n(m')$ و چون g_n یك بیك است پس $m = m'$ • بنابراین $(n, m) = (n', m')$ و در نتیجه h یك‌بیك است • فرض کنیم $x \in \cup \mathcal{A}$ • در اینصورت $X \in \mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه $x \in X$ • چون f پوشاست ، پس $n \in N$ وجود دارد بطوریکه $f(n) = X$ • چون g_n پوشاست، پس $m \in N$ وجود دارد بطوریکه $g_n(m) = x$ بنابراین $(n, m) \in N \times N$ وجود دارد بطوریکه $h(n, m) = x$ و در نتیجه h پوشاست • بنابراین h دوسویی است و $N \times N \sim \cup \mathcal{A}$ • بنابه ۲-۱-۵(و) ، $N \times N$ یك مجموعه بی شمار است و در نتیجه $\cup \mathcal{A}$ یك مجموعه بی شمار است•

<u>۵-۱-۳۹ : قضیه :</u> یك اجتماع بی شمار از مجموعه های شمارش پذیر، بی شمار است •

<u>اثبـات :</u>

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یك مجموعه بی شمار از مجموعه های شمارش پذیرباشد • نشان‌می‌دهیم که $\cup \mathcal{A}$ بی شمار است • چون $\mathcal{A}$ بی شمار است پس یك تابع دوسویی مانند f از N بـه $\mathcal{A}$ وجود دارد • فرض‌کنیم $f(n) = A_n$ • در اینصورت $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in N}$ برای هر $n \in N$ ، تعریف می‌کنیم :

$$B_n = A_n \cup (N \times \{n\})$$

و مجموعه $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in N}$ را در نظر می‌گیریم · چون $N\times\{n\}$ بی‌شمار و A_n شمارش پذیر است ، پس بنا به ۳۲-۱-۵ و ۳۴-۱-۵، B_n بی‌شمار است، برای هر $n\in N$ · پس هر عضو مجموعه $\mathcal{B}$ بی شمار است · حال تعریف می‌کنیم :

$$C_1=B_1 \text{ و } C_{n+1}=B_{n+1}-(B_1\cup\dots\cup B_n)$$

برای هر $n\in N$ · چون برای هر $m<n$ ، $N\times\{m\}\cap N\times\{n\}=\phi$ ، پس $N\times\{n\}\subseteq C_n$ برای هر $n\in N$. بنابراین از ۱۹-۱-۵، نتیجه می‌شود که برای هر $n\in N$ ، C_n نامتناهی است · بعلاوه چون $C_n\subseteq B_n$ ، پس بنابه ۲۰-۱-۵ ، C_n شمارش پذیر است و در نتیجه بی‌شمار است · همچنین از تعریف C_n نتیجه می‌شود که برای هر $m,n\in N$ ، اگر $m\neq n$ ، آنگاه $C_m\cap C_n=\phi$ ·

فرض کنیم $\mathcal{C}=\{C_n\}_{n\in N}$ · در اینصورت $\mathcal{C}$ یك مجموعه بی‌شمار از مجموعه های بی شمار است، بطوریکه برای‌هر $X,Y\in\mathcal{C}$ و $X\neq Y$ داریم $X\cap Y=\phi$ · پس بنا به ۲۸-۱-۵، $\cup\mathcal{C}$ بی‌شمار است ·

نشان می‌دهیم که $\cup\mathcal{B}=\cup\mathcal{C}$ · از تعریف داریم $\cup\mathcal{C}\subseteq\cup\mathcal{B}$ · فرض‌کنیم $x\in\cup\mathcal{B}$ · با استفاده از اصل خوش ترتیبی‌که درتذکر بعد از ۲۸-۱-۵ درمورد آن صحبت کردیم ، فرض‌میکنیم n کوچکترین عدد طبیعی باشد بطوریکه $x\in B_n$ · در اینصورت برای هر k کوچکتر از n داریم $x\notin B_k$ · ازتعریف C_n ، نتیجه می‌شود که $x\in C_n$ و در نتیجه $x\in\cup\mathcal{C}$ · بنابراین $\cup\mathcal{B}\subseteq\cup\mathcal{C}$ و درنتیجه $\cup\mathcal{B}=\cup\mathcal{C}$ · پس $\cup\mathcal{B}$ بی‌شمار است · چون برای هر $n\in N$ ، $A_n\subseteq B_n$ ، پس $\cup\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$ و در نتیجه بنا به ۲۰-۱-۵، $\cup\mathcal{A}$ شمارش پذیر است·نشان می‌دهیم که $\cup\mathcal{A}$ نامتناهی‌است · فرض کنیم $\cup\mathcal{A}$ متناهی باشد · در اینصورت بنا به ۲۴-۱-۵، $P(\cup\mathcal{A})$ متناهی است · چون $\mathcal{A}\subseteq P(\cup\mathcal{A})$، پس بنابه ۱۹-۱-۵، $\mathcal{A}$ متناهی‌است که یك تناقض می‌باشد · بنابراین $\cup\mathcal{A}$ نامتناهی و در نتیجه بی‌شمار است ·

۵-۱-۴۰ : نتیجه :

یك اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های شمارش پذیر، شمارش پذیر است •

اثبات :

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یك مجموعه شمارش پذیر از مجموعه های شمارش پذیر باشد •نشان می دهیم که $\cup\mathcal{A}$ شمارش پذیر است • چون $\mathcal{A}$ شمارش پذیر است ، پس $\mathcal{A}$ متناهی یابی شمار است• اگر $\mathcal{A}$ متناهی باشد ، آنگاه بنابه ۵-۱-۳۷, $\cup\mathcal{A}$ شمارش پذیر است •اگر $\mathcal{A}$ بی شمارباشد ، آنگاه بنابه ۵-۱-۳۹ , $\cup\mathcal{A}$ بی شمارودرنتیجه شمارش-پذیراست •بنابراین درهرحالت , $\cup\mathcal{A}$ شمارش پذیراست •

تذکر:

در ۵-۱-۲۶ ، تعریف کردیم که اگر مجموعه ای شمارش پذیر نباشد ، آنگاه آن مجموعه یك مجموعه شمارش ناپذیر نامیده می شود • در واقع یك مجموعه شمارش ناپذیر، مجموعه ای است که متناهی و بی شمار نباشد • تابحال مثالی از چنین مجموعه ای ارائه نکرده ایم • از قضیه زیر نتیجه می گیریم که $\mathbb{R}$ یك مجموعه شمارش ناپذیر است•

۵-۱-۴۱ : قضیه : مجموعه $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ شمارش ناپذیر است •

اثبات :

ابتدا نشان می دهیم که $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ نامتناهی است• فرض کنیم که $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ متناهی باشد •

در اینصورت بنا به ۵-۱-۱۰ , $\mathbb{R}$ متناهی است که یك تناقض به ۵-۱-۲۲ (ب) می باشد • پس $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ نامتناهی است • حال نشان می دهیم که $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ بی شمار نیز نمی باشد • فرض کنیم که $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ بی شمار باشد • در اینصورت یك تابع دوسویی مانند f از $\mathbb{N}$ به $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ وجود دارد • در اینصورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f(n)$ یك تابع از $\mathbb{N}$ به $\{0, 1\}$ است • برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، فرض کنیم $(f(n))(m) = x_{nm}$ ، که در آن $x_{nm} \in \{0, 1\}$ •در اینصورت مقادیر

تابع $f(n)$ ، بصورت دنباله زیر نوشته می‌شود :

$$x_{n1} \quad x_{n2} \cdots\cdots x_{nm} \cdots\cdots$$

جدول زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} \cdots\cdots & x_{1n} & \cdots\cdots \\ x_{21} & x_{22} \cdots\cdots & x_{2n} & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} \cdots\cdots & x_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

در واقع سطر اول جدول فوق دنباله مقادیر تابع $f(1)$ ، سطر دوم جدول دنباله مقادیر تابع $f(2)$ و الی آخر می‌باشند . حال تعریف می‌کنیم :

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$$

$$g(m) = \begin{cases} 1 \text{ و } x_{mm} = 0 \text{ اگر} \\ 0 \text{ و } x_{mm} = 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

دراینصورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $g(n) \neq x_{nn}$ و درنتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $g \neq f(n)$. پس $g \notin ran\, f$ و درنتیجه f پوشانیست . نتیجه یک تناقض است . پس $\mathbb{N}_{\{0,1\}}$ بی‌شمار نیست . بنابراین $\mathbb{N}_{\{0,1\}}$ شمارش ناپذیر است .

<u>۴۲-۱-۵ : مثال :</u>

(الف) بنا به ۱۰-۱-۵ ، $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}_{\{0,1\}}$. پس بنابه ۴۱-۱-۵ ، $\mathbb{R}$ شمارش‌ناپذیر است .

(ب) بنابه ۴-۱-۵ ، $\mathbb{R} \sim (0,1)$. چون $\mathbb{R}$ شمارش ناپذیر است ، پس $(0,1)$ نیز شمارش ناپذیر است .

<u>۴۳-۱-۵ : تمرین :</u>

(الف) فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد و $f : A \longrightarrow A$. نشان دهیدکه f

یك بیك است اگر و فقط اگر f پوشا باشد ·

(ب) فرض کنید A یك‌مجموعه متناهی و B یك مجموعه بی‌شمار باشند · نشان دهید که $A\times B$ بی‌شمار است ·

(ج) فرض کنید A و B دو مجموعه بی‌شمار باشند · نشان دهید‌که $A\times B$ بی‌شمار است·

(د) فرض کنید A_1، ....، A_n بی‌شمار باشند · نشان دهید‌که $A_1\times\cdots\times A_n$ بی‌شمار است ·

(هـ) نشان دهید‌که $\mathbb{Z}$ بی‌شمار است·

(و) نشان دهید‌که $\mathbb{Q}$ بی‌شمار است · (راهنمایی : برای $n\in\mathbb{N}$ ، اگر $A_n=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z}\right\}$، آنگاه $\mathbb{Q}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$) .

(ز) یك دستگاه مختصات دکارتی در یك صفحه‌را در نظر بگیرید · نشان دهید‌که مجموعه همه دوایر واقع در آن صفحه که مختصات مرکز آنها و شعاع آنها اعداد کسری‌هستند ، بی‌شمار می‌باشد ·

(ح) فرض کنید A شمارش ناپذیر و B یك زیر مجموعه شمارش پذیر از A باشد · نشان دهید‌که $A-B$ شمارش ناپذیر است ·

(ط) فرض کنید $\mathcal{A}=\{\mathbb{N}^n\mid n\in\mathbb{N}\}$، نشان دهید‌که $\bigcup\mathcal{A}$ بی‌شمار است·

(ی) نشان دهید‌که مجموعه همه زیر مجموعه های متناهی از $\mathbb{N}$ ، بی‌شمار است ·

۲-۵ : اعداد اصلی

در ۱-۱-۵۶، به هر مجموعه متناهی یك عدد وابسته کردیم · در اینجامیخواهیم این مطلب را به مجموعه های نامتناهی تعمیم دهیم · خاصیت مهمی که در رابطه با عدد مجموعه های متناهی بدست می‌آید ، خاصیت زیر است که در۱-۱-۵۸، مطرح شده است :

$$A\sim B\iff|A|=|B|$$

حال با استفاده از این خاصیت ، بطور کلی به هر مجموعه یك عدد بنام عدد اصلی آن مجموعه وابسته خواهیم کرد · سپس با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت قبل و

نتایجی که در این قسمت بدست می‌آوریم ، حساب اعداد اصلی را می‌سازیم .

۱-۲-۵ : تعریف :

فرض کنیم A یک مجموعه باشد . در اینصورت عدد اصلی A که با نماد $card\ A$ نمایش داده می‌شود ، عنصری است که در دو خاصیت زیر صدق می‌کند :

(الف) $card\,A = card\,B \Longleftrightarrow A \sim B$ ؛

(ب) اگر A یک مجموعه متناهی باشد ، آنگاه $card\ A = |A|$.

تذکر:

توجه می‌کنیم که عدد اصلی یک مجموعه مانند A ، لزوماً یک عدد طبیعی نیست و فقط در حالتی که A یک مجموعه متناهی باشد آنگاه عدد اصلی A همان عدد A است که یک عدد طبیعی می‌باشد . ولی مثلاً عدد اصلی $\mathbb{N}$ دیگر یک عدد طبیعی نیست ، بلکه عددی است که برای هر مجموعه A داریم :

$$A \text{ بی‌شمار باشد } \Longleftrightarrow card\ A = card\,\mathbb{N}$$

نمادگذاری :

در اینجا اعداد اصلی را با α ، b ، c ، d ، ...... نمایش می‌دهیم .

۲-۲-۵ : قضیه :

فرض کنیم $\alpha = card\,A$ و $b = card\ B$. در اینصورت مجموعه های A' و B' وجود دارند بطوریکه $A' \cap B' = \Phi$ و $card\ A' = \alpha$ و $card\,B' = b$.

اثبات : تعریف می‌کنیم :

$$A' = A \times \{1\} \quad \text{و} \quad B' = B \times \{2\}$$

در اینصورت $A' \cap B' = \Phi$ ، $A' \sim A$ و $B' \sim B$. بنابراین $A' \cap B' = \Phi$ ، $card\,A' = \alpha$ و $card\,B' = b$.

تذکر :

قضیه فوق می‌گوید که برای هر دو عدد اصلی a و b ، مجموعه های A و B را می‌توان طوری انتخاب کرد که $A\cap B=\Phi$ ، $card\,A=a$ و $card\,B=b$ •

۵-۲-۳ : تعریف : اعداد اصلی a و b را در نظر می‌گیریم •

(الف) اگر $a=card\,A$ ، $b=card\,B$ و $A\cap B=\Phi$ ، آنگاه جمع a و b را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$a+b=card\,(A\cup B)$$

(ب) اگر $a=card\,A$ و $b=card\,B$ ، آنگاه ضرب a و b رابصورت زیر تعریف می کنیم :

$$ab=card\,(A\times B)$$

(ج) اگر $a=card\,A$ و $b=card\,B$ ، آنگاه a بتوان b را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$a^{b}=card\,({}^{B}A)$$

۵-۲-۴ : تمرین :

نشان دهید که تعریف فوق بستگی به انتخاب مجموعه های A و B ندارد ؛ بعبارت دیگر نشان دهید که :

(الف) اگر $a=card\,A'$ ، $b=card\,B'$ و $A'\cap B'=\Phi$ ، آنگاه $a+b=card(A'\cup B')$.

(ب) اگر $a=card\,A'$ و $b=card\,B'$ ، آنگاه $ab=card(A'\times B')$.

(ج) اگر $a=card\,A'$ و $b=card\,B'$ ، آنگاه $a^{b}=card({}^{B'}A')$.

۵-۲-۵ : مثال :

فرض کنیم A و B دو مجموعه متناهی باشند و $A\sim\overline{m}$ و $B\sim\overline{n}$ • بنابه

۱-۲-۵ (ب) ، $\operatorname{card} A = m$ و $\operatorname{card} B = n$ • در اینصورت بنابه ۲۵-۱-۵ داریم :

(الف) اگر $A \cap B = \Phi$ ، آنگاه

$$\operatorname{card} A + \operatorname{card} B = \operatorname{card}(A \cup B) = m + n$$

(ب)

$$(\operatorname{card} A)(\operatorname{card} B) = \operatorname{card}(A \times B) = mn$$

(ج)

$$(\operatorname{card} A)^{\operatorname{card} B} = \operatorname{card}({}^{B}A) = m^{n}$$

بنابراین برای مجموعه های متناهی ، جمع ، ضرب و توان اعداد اصلی ، مانند جمع ، ضرب و توان معمولی اعداد طبیعی می باشد •

نمادگذاری :

عدد اصلی $\mathbb{N}$ ، یعنی $\operatorname{card} \mathbb{N}$ را با نماد $\aleph_0$ (میخوانیم الف صفر) نمایش می دهیم •

۶-۲-۵ : مثال :

(الف) از ۳۲-۱-۵ نتیجه می‌شود که ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم :

$$n + \aleph_0 = \aleph_0$$

(ب) از ۳۴-۱-۵ ، نتیجه می‌شود که :

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

(ج) از ۴۲-۱-۵ (ب) ، نتیجه می‌شود که ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم :

$$n\,\aleph_0 = \aleph_0$$

(د) از ۴۲-۱-۵ (ج)، نتیجه می‌شود که :

$$\aleph_0\,\aleph_0 = \aleph_0$$

(هـ) از ۸-۱-۵، نتیجه می‌شود که :

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{card}\left({}^{A}\{0,1\}\right) = \left(\operatorname{card}\{0,1\}\right)^{\operatorname{card} A} = 2^{\operatorname{card} A}$$

بنابراین داریم : $card\,\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$

همچنین بنابه تذکر بعداز ۱۰-۱-۵، داریم :

$$card\,\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$$

از ۴۲-۱-۵ (الف) نتیجه می‌شود که :

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$$

۷-۲-۵ : قضیه :

فرض کنیم A ، B و C سه مجموعه باشند . در اینصورت داریم :

(الف) اگر $B \cap C = \phi$ ، آنگاه $^{B \cup C}A \sim {}^{B}A \times {}^{C}A$.

(ب) $^{C}A \times {}^{C}B \sim {}^{C}(A \times B)$.

(ج) $^{C}({}^{B}A) \sim {}^{B \times C}A$.

اثبات :

(الف) اثبات این‌بند شبیه اثباتی است که در قسمت آخر اثبات بند (د) ، ۲۴-۱-۵ ارائه گردید . بعنوان تمرین اثبات این بند رابنویسید .

(ب) فرض کنیم $f \in {}^{C}A \times {}^{C}B$. در اینصورت $f_1 \in {}^{C}A$ و $f_2 \in {}^{C}B$ وجود دارند بطوریکه $f = (f_1 , f_2)$. تابع $g_f \in {}^{C}(A \times B)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$g_f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

حال تعریف می‌کنیم :

$$h : {}^{C}A \times {}^{C}B \longrightarrow {}^{C}(A \times B)$$

$$h(f) = g_f$$

نشان می‌دهیم که h یک تابع دوسویی است . فرض کنیم $f = (f_1 , f_2)$ و $f' = (f'_1 , f'_2)$

متعلق به ${}^{C}A \times {}^{C}B$ باشند و $h(f)=h(f')$ • در اینصورت $g_f = g_{f'}$ و در نتیجه برای هر $x \in C$ ، $g_f(x)=g_{f'}(x)$ پس برای هر $x \in C$ ، $(f_1(x), f_2(x)) = (f'_1(x), f'_2(x))$.

بنابراین برای هر $x \in C$ ، $f_1(x)=f'_1(x)$ و $f_2(x)=f'_2(x)$ • بنابراین $f_1 = f'_1$ و $f_2 = f'_2$ و در نتیجه $f = f'$ • پس h یک بیک است • حال فرض کنیم $l \in {}^{C}A \times B$ و برای هر $x \in C$ داشته باشیم $l(x) = (x_1, x_2)$ ، که در آن $x_1 \in A$ و $x_2 \in B$ •

تابع $f_1 \in {}^{C}A$ و تابع $f_2 \in {}^{C}B$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f_1(x) = x_1 \quad \text{و} \quad f_2(x) = x_2$$

در اینصورت اگر $f=(f_1, f_2)$ ، آنگاه $l = g_f$ ، زیرا که $dom\, l = dom\, g_f = C$ و برای هر $x \in C$ داریم :

$$l(x) = (x_1, x_2) = (f_1(x), f_2(x)) = g_f(x) \,.$$

بنابراین $f \in {}^{C}A \times {}^{C}B$ وجود دارد بطوریکه :

$$h(f) = g_f = l$$

پس h پوشاست • بنابراین h دوسویی است و در نتیجه ، ${}^{C}A \times {}^{C}B \sim {}^{C}A \times B$ •

ج) فرض کنیم $f \in {}^{C}({}^{B}A)$ • در اینصورت برای هر $x \in C$ ، $f(x) \in {}^{B}A$ و برای هر $y \in B$ ، $(f(x))(y) \in A$ • تابع $g_f \in {}^{B \times C}A$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$g_f(y, x) = (f(x))(y)$$

حال تعریف می‌کنیم :

$$h : {}^{C}({}^{B}A) \longrightarrow {}^{B \times C}A$$

$$h(f) = g_f$$

نشان می‌دهیم که h یک تابع دوسویی است • فرض کنیم $f, f' \in {}^{C}({}^{B}A)$ و $h(f) = h(f')$ •

در اینصورت $g_f = g_{f'}$ و در نتیجه برای هر $(y, x) \in B \times C$ داریم :

بنابراین برای هر $g_f(y,x) = g_{f'}(y,x)$ • پس $(f(x))(y) = (f'(x))(y)$ • $x \in C$ ، $f(x) = f'(x)$ و در نتیجه $f = f'$ پس h یك بیك است • حال فرض کنیم $\ell \in {}^{B \times C}A$ • تابع $f \in {}^{C}({}^{B}A)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم • برای هر $x \in C$ و $y \in B$ •

$$(f(x))(y) = \ell(y, x)$$

در اینصورت $g_f = \ell$ ، زیراکه $dom\, g_f = dom\, \ell = B \times C$ و برای هر $(y,x) \in B \times C$ داریم :

$$g_f(y,x) = (f(x))(y) = \ell(y,x)$$

بنابراین $f \in {}^{C}({}^{B}A)$ وجود دارد بطوریکه :

$$h(f) = g_f = \ell$$

پس h پوشا است • بنابراین h دوسویی است و در نتیجه ${}^{C}({}^{B}A) \sim {}^{B \times C}A$

قضیه زیر خواص جمع ، ضرب و توان اعداد اصلی رانشان می‌دهد •

<u>۸-۲-۵ : قضیه :</u>

فرض کنیم a ، b و c اعداد اصلی باشند • در اینصورت داریم :

الف) $a + b = b + a$ ، $ab = ba$ •

ب) $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(ab)c = a(bc)$ •

ج) $a(b + c) = ab + ac$

د) $a^{b+c} = a^b a^c$

هـ) $(ab)^c = a^c b^c$

و) $(a^b)^c = a^{bc}$

<u>۹-۲-۵ : تمرین :</u> قضیه فوق را ثابت کنید •

۱۰-۲-۵ : تعریف :

اعداد اصلی $a = card\,A$ و $b = card\,B$ را درنظرمی‌گیریم . در اینصورت

(الف) می‌گوئیم a کوچکتر یامساوی b است و می‌نویسیم $a \leqslant b$ ، اگر $A \leqslant B$ ؛

(ب) می‌گوئیم a کوچکتر از b است و می‌نویسیم $a < b$ ، اگر $a \leqslant b$ و $a \neq b$.

۱۱-۲-۵ : تمرین :

نشان دهید که تعریف فوق بستگی به انتخاب مجموعه های A و B ندارد ، به عبارت دیگر نشان دهید که اگر $A \sim A'$ و $B \sim B'$ ، آنگاه داریم :

(الف) $card\,A \leqslant card\,B \Longleftrightarrow card\,A' \leqslant card\,B'$

(ب) $card\,A < card\,B \Longleftrightarrow card\,A' < card\,B'$

۱۲-۲-۵ : مثال :

(الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم $n < \aleph_0$.

(ب) $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

۱۳-۲-۵ : قضیه :

فرض کنیم a ، b ، c و d اعداد اصلی باشند . اگر $a \leqslant b$ و $c \leqslant d$ ، آنگاه داریم :

(الف) $a + c \leqslant b + d$

(ب) $ac \leqslant bd$

اثبات :

(الف) فرض کنیم $a = card\,A$ ، $b = card\,B$ ، $c = card\,C$ و $d = card\,D$ ، بطوریکه $A \cap C = \Phi$ و $B \cap D = \Phi$. چون $a \leqslant b$ ، پس یک تابع

یك بیك مانند f از A به B و چون $c \leqslant d$ ، پس یك تابع یك بیك مانند g از C به D وجود دارند • تعریف می‌کنیم :

$$h : A \cup C \longrightarrow B \cup D$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) , \ x \in A & \text{اگر} \\ g(x) , \ x \in C & \text{اگر} \end{cases}$$

در اینصورت مانند اثباتی که در بند (الف) ، ۵-۱-۵ ارائه گردید ، می‌توان نشان داد که h یك بیك است • بنابراین $A \cup C \leqslant B \cup D$ چون $A \cap C = \Phi$ و $B \cap D = \Phi$ • پس $a + c = card(A \cup C)$ و $b + d = card(B \cup D)$ و در نتیجه $a + c \leqslant b + d$ •

(ب) این بند را بعنوان تمرین ثابت کنید •

<u>۵-۲-۱۴ : تمرین :</u> فرض کنید a ، b و c اعداد اصلی باشد • نشان دهیدکه :

(الف) $a \leqslant a$

(ب) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ ، آنگاه $a \leqslant c$

سئوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که اگر a و b دوعدد اصلی باشند و $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ ، آیا می‌توان نتیجه گرفتکه $a = b$ • قضیه زیر که به قضیه شرو در و برنشتاین معروف است ، به این سئوال جواب مثبت می‌دهد • در اینجا از اثبات این قضیه صرفنظر می‌کنیم •

<u>۵-۲-۱۵ : قضیه (شرودر - برنشتاین)</u>

اگر A و B دو مجموعه باشند بطوریکه $A \leqslant B$ و $B \leqslant A$ ، آنگاه داریم $A \sim B$.

<u>۵-۲-۱۶ : تمرین :</u> فرض کنید a ، b،c،d اعداد اصلی باشند •

(الف) تساویهای زیر راثابت کنید :

$a + 0 = a$ ، $a0 = 0$ ، $0^a = 0$ ، $1a = a$ ، $a^1 = a$ ، $1^a = 1$ •

(ب) نشان دهیدکه $ab = 0$ اگر و فقط اگر $a = 0$ یا $b = 0$

(ج) نشان دهید که $ab=1$ اگر و فقط اگر $a=1$ و $b=1$.

(د) بوسیله ارائه مثالهای ناقص نشان دهید که عبارات زیر غلط هستند :

$$a+b=a+c \Longrightarrow b=c$$

$$a\neq 0 \wedge ab=ac \Longrightarrow b=c$$

$$a<b \wedge c\leqslant d \Longrightarrow a+c<b+d$$

$$a<b \wedge c\leqslant d \Longrightarrow ac<bd$$

(هـ) اگر $n\in N$ ، آنگاه نشان دهید که :

$$na=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ مرتبه}}$$

و

$$a^n=\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}}$$

(و) اگر $x, y\in \mathbb{R}$ ، آنگاه نشان دهید که :

$$\operatorname{card}[x,y]=\operatorname{card}[x,y)=\operatorname{card}(x,y]=\operatorname{card}(x,y)=\operatorname{card}\mathbb{R}=2^{\aleph_0}$$

۳-۵- اصل انتخاب

در ریاضیات قضایای مهمی وجود دارند که اثبات آنها به کمک اصل انتخاب امکان پذیر است . مثلاً همانطوریکه در تذکر بعد از ۳-۲-۳، گفته شد ، اثبات بند (ب) ، ۳-۲-۳ به کمک اصل انتخاب امکان پذیر است . البته اثبات بند (ب) ۳-۲-۳ با استفاده از اصل انتخاب بطور صریح در این قسمت گفته میشود . در این قسمت اصل انتخاب و برخی از معادل های آن را معرفی میکنیم .

اصل انتخاب :

اگر $\mathcal{A}$ یک مجموعه غیر تهی از مجموعه ها باشد ، بطوریکه برای هر $X\in\mathcal{A}$ ، داشته باشیم $X\neq\Phi$ ، آنگاه یک تابع $f:\mathcal{A}\longrightarrow \cup\mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه برای هر $X\in\mathcal{A}$ داریم $f(X)\in X$.

تذکر:

بنا به اصل انتخاب، وابسته به مجموعه $\mathcal{A}$، تابع f وجود دارد، بطوریکه از هر عضو X از $\mathcal{A}$، عنصر $f(X)$ را انتخاب می‌کند • اگر به این تابع، تابع انتخاب نام دهیم، آنگاه اصل انتخاب می‌گوید که هر مجموعه غیرتهی از مجموعه های غیرتهی دارای یک تابع انتخاب است•

همانطوریکه قبلاً گفته شد، بند (ب)، ۳-۲-۳ را بطور صریح با بکاربردن اصل انتخاب، در زیر اثبات می‌کنیم •

۱-۳-۵ : قضیه :

اگر $f: A \longrightarrow B$ یک تابع پوشا باشد آنگاه f دارای یک معکوس راست است•

اثبات : مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\mathcal{D} = \left\{ f^{-1}[\{y\}] \mid y \in B \right\}$$

چون f پوشاست، پس هر عضو $\mathcal{D}$ غیرتهی است • پس بنا به اصل انتخاب تابع $h: \mathcal{D} \to \cup\mathcal{D}$ وجود دارد. بطوریکه برای هر $X \in \mathcal{D}$ داریم $f(X) \in X$• بنا به تعریف $\mathcal{D}$، برای هر $X \in \mathcal{D}$، یک عنصر $y \in B$ وجود دارد بطوریکه $X = f^{-1}[\{y\}]$•

همچنین برای هر $X, Y \in \mathcal{D}$، اگر $X \neq Y$، آنگاه $X \cap Y = \phi$، زیرا که اگر $X = f^{-1}[\{y\}]$ و $Y = f^{-1}[\{z\}]$، برای $y, z \in B$ و $f^{-1}[\{y\}] \cap f^{-1}[\{z\}] \neq \phi$، آنگاه وجود دارد x بطوریکه $x \in f^{-1}[\{y\}] \cap f^{-1}[\{z\}]$ و در نتیجه $f(x) = y$ و $f(x) = z$ وچون f یک تابع است پس $y = z$• پس $f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{z\}]$. حال تعریف می‌کنیم :

$$g : B \longrightarrow A$$
$$g(y) = h\left(f^{-1}[\{y\}]\right)$$

در اینصورت g یک تابع است ، زیرا که اگر $y, z \in B$ و $y = z$ ، آنگاه $f^{-1}[\{z\}] = f^{-1}[\{y\}]$ و چون h یک تابع است ، پس $h(f^{-1}[\{y\}]) = h(f^{-1}[\{z\}])$ و در نتیجه $g(y) = g(z)$ • بعلاوه نشان میدهیم $f \circ g = i_B$ که درآن i_B تابع همانی روی B است • اگر $y \in B$ ، آنگاه داریم :

$$(f \circ g)(y) = f(g(y))$$
$$= f(h(f^{-1}[\{y\}]))$$

و چون $h(f^{-1}[\{y\}]) \in f^{-1}[\{y\}]$ پس $f(h(f^{-1}[\{y\}])) = y$ • بنا براین $(f \circ g)(y) = y$ و در نتیجه $f \circ g = i_B$ • پس f دارای معکوس راست g است •

<u>۲-۳-۵ : قضیه :</u> عبارات زیر معادلند :

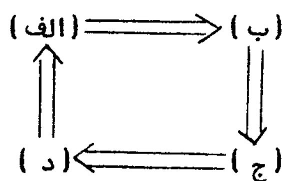
(الف) اصل انتخاب •

(ب) اگر $\mathcal{A}$ یک مجموعه اندیس دار با مجموعه اندیس I باشد ، بطوریکه برا هـــر $i \in I$ ، $A_i \neq \Phi$ ، آنگاه $\prod_{i \in I} A_i \neq \Phi$.

(ج) اگر R یک رابطه باشد آنگاه یک تابع f وجود دارد بطوریکه $dom f = dom R$ و $f \subseteq R$ •

(د) اگر $\mathcal{A}$ یک مجموعه از مجموعه های غیرتهی باشد ، بطوریکه برای هر $X, Y \in \mathcal{A}$ و $X \neq Y$ ، داشته باشیم $X \cap Y = \Phi$ ، آنگاه یک مجموعه C وجود دارد بطوریکه برای هر $X \in \mathcal{A}$ ، $C \cap X$ یک مجموعه تک عضوی است •

اثبــات : مطابق شکل زیر قضیه را اثبات میکنیم :



(ب) $\Longrightarrow$ (الف)

داریم $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ و برای هر $i \in I$ ، $A_i \neq \Phi$. پس بنا به اصل انتخاب تابع $f:\mathcal{A}\to \cup\mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه برای هر $X\in\mathcal{A}$ ، $f(X)\in X$، یا برای هر $i\in I$ ، $f(A_i)\in A_i$. تعریف می‌کنیم :

$$g: I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$
$$g(i)=f(A_i)$$

در اینصورت بنا به ۷-۳-۳، $g\in \prod_{i\in I} A_i$ و در نتیجه $\prod_{i\in I} A_i \neq \Phi$

(ج) $\Longrightarrow$ (ب)

اگر $R=\Phi$ ، آنگاه Φ یک تابع است که دامنه آن مساوی دامنه R می‌باشد و زیر مجموعه ای از R است. فرض کنیم $R\neq\Phi$. تعریف می‌کنیم :

$$\mathcal{A}=\Big\{R[\{x\}] \,\Big|\, x\in dom R\Big\}$$

در اینصورت هر عضو $\mathcal{A}$ غیر تهی است. چون تابع همانی روی $\mathcal{A}$ یک تابع دوسویی است پس می‌توان $\mathcal{A}$ را بعنوان یک مجموعه اندیس دار با مجموعه اندیس $\mathcal{A}$ در نظر گرفت، یعنی $\mathcal{A}=\{X\}_{X\in\mathcal{A}}$.

در اینصورت بنابه فرض $\prod_{X\in\mathcal{A}} X \neq \Phi$ و در نتیجه g وجود دارد بطوریکه $g\in\prod_{X\in\mathcal{A}} X$.

پس g یک تابع از $\mathcal{A}$ به $\cup\mathcal{A}$ است بطوریکه برای هر $X\in\mathcal{A}$ ، $g(X)\in X$. تعریف می‌کنیم :

$$f: dom R \to ran R$$
$$f(x)=g(R[\{x\}])$$

در اینصورت ملاحظه می‌شود که تابع f دارای خواص مورد نظر است، یعنی

$f \subseteq R$ و $dom\, f = dom\, R$.

(د) $\Longrightarrow$ (ج)

تعریف می‌کنیم : $R = \{(X, x) \mid X \in \mathcal{A} \wedge x \in X\}$

در اینصورت R یک رابطه است و $dom\, R = \mathcal{A}$. بنا به فرض تابع f وجود دارد بطوریکه $dom\, f = dom\, R$ و $f \subseteq R$. فرض کنیم $C = ran\, f$، نشان می‌دهیم که C در شرایط بند (د) صدق می‌کند . از تعریف R بسهولت دیده می‌شود که تابع f یک تابع از $\mathcal{A}$ به $\cup\mathcal{A}$ است بطوریکه برای هر $X \in \mathcal{A}$ داریم $f(X) \in X$. بنابراین برای هر $X \in \mathcal{A}$ داریم $f(x) \in C \cap X$. حال فرض کنیم $y \in C \cap X$. در اینصورت $y \in ran\, f$ و $y \in X$. پس $Y \in \mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه $y = f(Y)$ و $y \in X$. چون $f(Y) \in Y$، پس $y \in X \cap Y$ و در نتیجه $X \cap Y \neq \Phi$. پس بنا به فرض $X = Y$ و در نتیجه $y = f(X)$. بنابراین برای هر $X \in \mathcal{A}$ ، $C \cap X = \{f(X)\}$ یک مجموعه تک عضوی است .

(الف) $\Longrightarrow$ (د)

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک مجموعه از مجموعه های غیر تهی باشد . تعریف می کنیم :

$$\mathcal{B} = \{\{Y\} \times Y \mid Y \in \mathcal{A}\}$$

در اینصورت هر عنصر $\mathcal{B}$ غیر تهی است و اشتراک هر دو عنصر متمایز $\mathcal{B}$ مساوی تهی است، زیرا که چون برای هر $Y \in \mathcal{A}$ ، $Y \neq \Phi$ ، پس $\{Y\} \times Y \neq \Phi$ و اگر $(\{Y\} \times Y) \cap (\{Z\} \times Z) \neq \Phi$ آنگاه روشن است که $\{Y\} \times Y = \{Z\} \times Z$. پس بنا به فرض یک مجموعه C وجود دارد بطوریکه برای هر $\{Y\} \times Y \in \mathcal{B}$ ، $C \cap (\{Y\} \times Y)$ یک مجموعه تک عضوی است . فرض کنیم ، $C \cap (\{Y\} \times Y) = \{(\{Y\}, y)\}$. تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \cup\mathcal{A}$$

$f(Y) = y =$ مولفه دوم زوج مرتب متعلق به $C \cap (\{Y\} \times Y)$

در اینصورت روشن است که f یک تابع انتخاب برای $\mathcal{A}$ است و در نتیجه اصل انتخاب

برقرار است •

<u>۳-۳-۵ : تمرین :</u> نشان دهید که جمله زیر معادل اصل انتخاب است•
" اگر $f : A \rightarrow B$ یک تابع پوشا باشد آنگاه f دارای یک معکوس راست است• "

<u>تذکــر:</u>

حال به بیان چندمعادل دیگر اصل انتخاب می‌پردازیم • در اینجا از اثبات معادل بودن آنها بااصل انتخاب صرفنظر می‌کنیم ابتدا قضیه زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیــم :

<u>٤-۳-۵ : قضیه :</u> جمله زیر معادل اصل انتخاب است :

" برای هر دو مجموعه A و B داریم $A \leqslant B$ یا $B \leqslant A$• "

از قضیه فوق نتیجه زیر بسهولت بدست می‌آید :

<u>۵-۳-۵ : نتیجه :</u> اگر α و b دو عدد اصلی باشند ، آنگاه $\alpha \leqslant b$ یا $b \leqslant \alpha$•

یکی از اصولی که معادل اصل انتخاب است و بخصوص در جبر کاربرد نسبتــاً زیادی دارد اصل زیر است که به لم زورن معروف است •

<u>لــم زورن :</u>

فرض کنیم A یک مجموعه مرتب جزیی غیر تهی باشد • اگرهر زیر مجموعه مرتــب خطی از A دارای یک کران بالا باشد ، آنگاه A دارای یک عنصر ماکسیمال است•

برای مثال نشان می‌دهیم که می‌توان با استفاده از لم زورن بند ج ، ۲-۳-۵ و جمله بکار رفته شده در ٤-۳-۵ را اثبات کرد • این مطالب را در قضیه زیر اثبــات می‌کنیــم •

٦-۳-٥ : قضیه : با استفاده از لم زورن داریم :

(الف) اگر R یك رابطه باشد ، آنگاه تابع f وجود دارد بطوریکه $dom\, f = dom R$ و $f \subseteq R$.

(ب) برای هر دو مجموعه C و D داریم $C \preccurlyeq D$ یا $D \preccurlyeq C$.

اثبـات :

(الف) تعریف می‌کنیم :

$$A = \{ f \subseteq R \mid \text{یك تابع است } f \}$$

چون $\Phi \in A$ ، پس $A \neq \emptyset$. مجموعه A را می‌توان بعنوان یك مجموعه مرتب جزئی با رابطه ترتیبی جزئی $\subseteq$ در نظر گرفت . فرض کنیم B یك زیر مجموعه مرتب خطی A باشد . نشان می‌دهیم که B دارای یك کران بالا در A است . برای اینکار نشان می‌دهیم که $\cup B \in A$ ، زیرا که در اینصورت $\cup B$ یك کران بالا برای B خواهد بود . چون هر عنصر B زیر مجموعه ای از R است ، پس $\cup B \subseteq R$. بعلاوه $\cup B$ یك تابع است . برای نشان دادن این مطلب فرض کنیم $(x,y),(x,z) \in \cup B$. در اینصورت $f, g \in B$ وجود دارند بطوریکه $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in g$. چون B یك مجموعه مرتب خطی است ، پس $f \subseteq g$ یا $g \subseteq f$. اگر $f \subseteq g$ آنگاه $(x,y),(x,z) \in g$ و چون g یك تابع است ، پس $y = z$. اگر $g \subseteq f$ ، آنگاه بدلیل مشابه $y = z$. پس $\cup B$ یك تابع است و در نتیجه $\cup B \in A$. حال بنابه لم زورن مجموعه A دارای یك عنصر ماکسیمال مانند $\bar{f}$ است . نشان می‌دهیم $dom\bar{f} = dom R$. فرض کنیم $dom\bar{f} \neq dom R$. در اینصورت x وجود دارد بطوریکه $x \in dom R - dom\bar{f}$. چون $x \in dom R$ پس y وجود دارد بطوریکه $(x,y) \in R$. حال تعریف می‌کنیم :

$$f' = \bar{f} \cup \{(x,y)\}$$

در اینصورت $f' \in A$ و $\bar{f} \subset f'$ که یك تناقض به ماکسیمال بودن $\bar{f}$ است . بنابراین $dom\bar{f} = dom R$ و در اینجا بند (الف) اثبات می‌شود .

(ب) تعریف می‌کنیم :

$$A = \{ f \mid \text{یك تابع یك بیك است } f \wedge dom f \subseteq C \wedge ran f \subseteq D \}$$

چون تابع Φ از Φ به Φ در A است ، پس $\Phi \neq A$ • مانند بند (الف) ، A را می‌توان بعنوان یك مجموعه مرتب جزئی با رابطه ترتیبی جزیی $\leq$ در نظر گرفت • فرض کنیم B یك زیر مجموعه مرتب خطی از A باشد • نشان می‌دهیم $UB \in A$ و در نتیجه B دارای یك کران بالا در A است • مانند بند (الف) ، UB یك تابع است • نشان می‌دهیم که UB یك بیك است • فرض کنیم $(x,y),(x',y) \in UB$ • در اینصورت f ، g در B وجود دارند بطوریکه $(x,y) \in f$ و $(x',y) \in g$ • چون B مرتب خطی‌است، پس $f \leq g$ یا $g \leq f$ • بنابراین $(x,y),(x',y) \in g$ یا $(x',y) \in f$ و (x,y) و چون f و g هر دو یك بیك هستند ، پس نتیجه می‌شود که $x = x'$ بنابراین UB یك بیك است • حال فرض کنیم $x \in dom\, UB$ در اینصورت y وجود دارد بطوریکه $(x,y) \in UB$ و در نتیجه $f \in B$ وجود داردبطوریکه $(x,y) \in f$ چون $dom\, f \subseteq C$ ، پس $x \in C$ و در نتیجه $dom\, UB \subseteq C$. بطریق مشابه ثابت می‌شود که $ran\, UB \subseteq D$ •

حال بنابه لم زورن A دارای یك‌عنصر ماکسیمال مانند $\bar{f}$ است • نشان می‌دهیم کــــه $dom\, \bar{f} = C$ یا $ran\, \bar{f} = D$. فرض کنیم که هردو تساوی برقرار نباشند • در اینصورت $c \in C - dom\, \bar{f}$ و $d \in D - ran\, \bar{f}$ وجود دارند • تعریف میکنیم :

$$f' = \bar{f} \cup \{(c,d)\}$$

در اینصورت $f' \in A$ و $\bar{f} \subset f'$ که یك تناقض به ماکسیمال بودن $\bar{f}$ است • پــس $dom\, \bar{f} = C$ یا $ran\, \bar{f} = D$. اگر $dom\, \bar{f} = C$ ، آنگاه $C \leqslant D$. اگـــر $ran\, \bar{f} = D$ آنگاه $\bar{f}^{-1}$ یك تابع یك بیك از D به C است ودر نتیجه $D \leqslant C$. بنا براین $C \leqslant D$ یا $D \leqslant C$ •

اصل دیگری که معادل اصل انتخاب است ، اصل زیر می‌باشد :

اصل خوش ترتیبی : هر زیر مجموعه غیر تهی از N دارای یك کوچکترین عنصراست•

کاربرد اصل خوش ترتیبی را در ۵-۱-۲۸ و ۵-۱-۳۹ ملاحظه کردیم• همانطوری که گفتیم لم زورن و اصل خوش ترتیبی هر دو معادل اصل انتخاب هستند و در نتیجه این سه اصل معادل یکدیگرند • در اینجا از اثبات این مطلب صرفنظر می‌شود •

۵-۳-۷ : تمرین : فرض کنید $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ یك مجموعه اندیس دار با مجموعــــه

اندیس I که یک مجموعه متناهی است ، باشد . اگر برای هر $i \in I$ ، $A_i \neq \phi$ ،
آنگاه بدون استفاده از اصل انتخاب یا معادلهای آن ، ثابت کنید که $\prod_{i \in I} A_i \neq \phi$.

فصـــل ٦

ساختمانهای جبـــری

این فصل مقدمه مختصری برای جبر است و از سه قسمت تشکیل شده است•در قسمت اول عمل دوتایی و مثالهای متنوع آن را معرفی می‌کنیم و سپس برخی از خـــواص آنرا مورد بررسی قرار خواهیم داد • در قسمت دوم ساختمان جبری را تعریف‌کرده و بعضی از ساختمانهای جبری خاص را معرفی می‌کنیم • قسمت‌آخر این فصل در مـور د مقایسه ساختمانهای جبری صحبت می‌کند •

۱-٦- عمل دوتایـــی

عمل جمع معمولی را در $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم • این عمل را می‌توان بصورت یـــک تابع از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ در نظر گرفت بطوریکه به هر زوج از اعداد طبیعی (m,n) ، مجموع آنها یعنی $m+n$ را نسبت می‌دهد • بنابراین می‌توان نوشت :

$$+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$+(m,n) = m+n$$

در اینجا میخواهیم این مفهوم را بطور مجرد مورد بررسی قرار دهیم •

۱-۱-٦ : تعریف :

فرض کنیم A یک مجموعه باشد • اگر f یک تابع از $A\times A$ به A باشد ، آنگاه f یک عمل دوتایی روی A نامیده می‌شود •

نمادگـذاری : معمولاً یک عمل دوتایی را با نماد $*$ نمایش خواهیم داد و اگر $*$ یک عمل

دوتایی روی A باشد، یعنی $*$ یک تابع از $A \times A$ به A باشد، آنگاه برای هر $x, y \in A$
می نویسیم $*(x, y) = x * y$

۲-۱-٦ : مثال :

(الف) عمل ضرب در $\mathbb{R}$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{R}$ است • بدین ترتیب که این عمل به هر زوج از اعداد حقیقی، حاصلضرب آن دو عدد را وابسته می‌کند •

(ب) عمل $*$ را روی $\mathbb{Z}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x * y = x + y + xy$$

در اینصورت $*$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ است •

(ج) فرض کنیم A یک مجموعه و $\mathcal{R}$ مجموعه همه روابط روی A باشد • در اینصورت عمل ترکیب روابط، یک عمل دوتایی روی $\mathcal{R}$ است، زیرا که نتیجه ترکیب دو رابطه روی A یک رابطه روی A است •

$$\circ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$\circ(R, S) = R \circ S$$

(د) فرض کنیم A یک مجموعه و A_A مجموعه همه توابع روی A باشد • در اینصورت عمل ترکیب توابع، یک عمل دوتایی روی A_A است، زیرا که نتیجه ترکیب دوتابع روی A، یک تابع روی A است •

$$\circ : A_A \times A_A \longrightarrow A_A$$

$$\circ(f, g) = f \circ g$$

(هـ) فرض کنیم A یک مجموعه و S_A مجموعه همه توابع دوسویی روی A باشد • در اینصورت عمل ترکیب توابع، یک عمل دوتایی روی S_A است، زیرا که نتیجه ترکیب دوتابع دوسویی روی A، یک تابع دوسویی روی A است •

(و) مجموعه زیررا در نظر می‌گیریم :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

تعریف می‌کنیم :

$$* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) * (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

در اینصورت * یك عمل دوتایی روی $\mathbb{R}^n$ است • معمولاً این عمل دوتایی * را با همان نماد جمع معمولی یعنی " + " نمایش میدهند •

<u>۳-۱-٦ : تمرین :</u>

در هریك از بندهای زیر نشان دهیدکه عمل مورد نظر روی مجموعه مربوطه یك عمل دوتایی روی آن مجموعه است •

(الف) عمل $\vee$ روی مجموعه همه گزاره ها •

(ب) عمل $\wedge$ روی مجموعه همه گزاره ها •

(ج) اگر A یك مجموعه باشد ، آنگاه عمل $\cup$ روی $\mathcal{P}(A)$ •

(د) اگر A یك مجموعه باشد ، آنگاه عمل $\cap$ روی $\mathcal{P}(A)$ •

(هـ) عمل تفاضل روی $\mathbb{Z}$.

(و) عمل * روی $\mathbb{Q}$ که بصورت زیر تعریف میشود :

$$x * y = \frac{x+y}{۲}$$

(ز) عمل * روی $\mathbb{N}$ که بصورت زیر تعریف میشود :

$x * y =$ بزرگترین مقسوم علیه مشترك x ، y

<u>٤-۱-٦ : تمرین :</u> کدامیك از اعمال زیر یك عمل دوتایی روی مجموعه مربوطه است ؟

(الف) عمل تقسیم در $\mathbb{R}$ ..

(ب) عمل تقسیم در $\mathbb{Q} - \{0\}$ •

(ج) عمل تفاضل در $\mathbb{N}$.

(د) اگر A یك مجموعه باشد • آنگاه عمل * روی $\mathcal{P}(A)$ که بصورت زیر تعریف میشود:

$$X * Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

<u>جدول یك عمل دوتایی :</u>

اگر * یك عمل دوتایی روی یك مجموعه متناهی $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ باشد ،

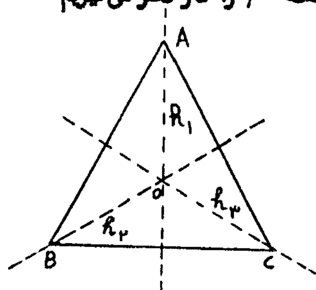
آنگاه می‌توان جدولی بصورت زیر برای عمل $*$ وابسته نمود :

$*$	α_1	....	α_i	....	α_n
α_1					
$\vdots$					
α_i			$\alpha_i * \alpha_j$		
$\vdots$					
α_n					

در جدول فوق عناصر A را بترتیب بعنوان سطر اول و ستون اول جدول می‌نویسیم وسپس برای هر $i,j \in \{1,\dots,n\}$ حاصل ترکیب $\alpha_i * \alpha_j$ را در مربع وابسته به α_i و α_j، می‌نویسیم و باین ترتیب جدول را تکمیل می‌کنیم •

<u>۵-۱-۶ : مثال :</u>

مثلث متساوی الاضلاع ABC با مرکز O (محل تلاقی سه میانه مثلث) ومحورهای h_1، h_2 و h_3 را واقع درصفحه P را در نظر می‌گیریم •



توسط شش تبدیل می‌توان مثلث فوق را برخودش منطبق کرد • این شش تبدیل‌را در زیر مشخص می‌کنیم •

۱- دوران حول نقطه o به اندازه زاویه 120° در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت • این تبدیل رابا r_1 نمایش می‌دهیم •

۲- دوران حول نقطه o به اندازه زاویه 240° درخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت• این تبدیل را با r_2 نمایش می‌دهیم •

۳- دوران حول نقطه o به اندازه زاویه 360° در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت • این تبدیل را با e نمایش می‌دهیم •

٤- انعکاس نسبت به محور R_1 • این‌تبدیل را با a نمایش می‌دهیم •

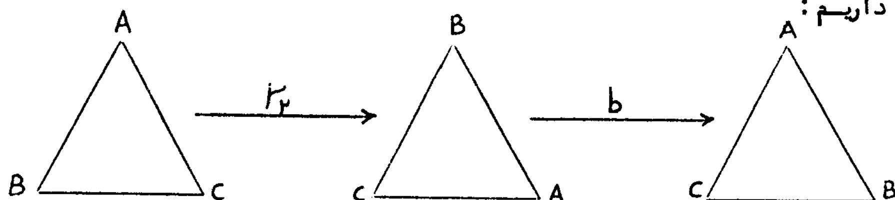
٥- انعکاس نسبت به محور R_2 • این تبدیل را با b نمایش می‌دهیم •

٦- انعکاس نسبت به محور R_3 • این تبدیل را با c نمایش می‌دهیم •

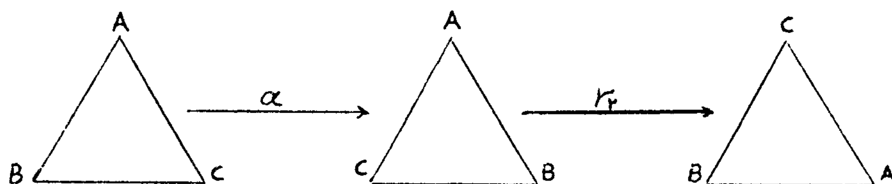
حال مجموعه همه این تبدیلات را با D_3 نمایش می‌دهیم ، یعنی فرض کنیم $D_3=\{e, r_1, r_2, a, b, c\}$ • عمل " o " را روی D_3 بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$x \circ y = x$ انجام تبدیل y و سپس انجام تبدیل

در اینصورت o یک عمل دوتایی روی D_3 است • بعنوان مثال $b \circ r_2 = a$ ، زیراکه داریم :



همچنین $r_2 \circ a = b$ ، زیرا که داریم :



جدول عمل دوتایی o روی D_3 عبارتست از:

$\circ$	e	r_1	r_2	α	b	c
e	e	r_1	r_2	α	b	c
r_1	r_1	r_2	e	c	α	b
r_2	r_2	e	r_1	b	c	α
α	α	b	c	e	r_1	r_2
b	b	c	α	r_2	e	r_1
c	c	α	b	r_1	r_2	e

۶-۱-۶ : تعریف :

فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه A باشد • در اینصورت زیر مجموعه B از A تحت عمل $*$ بسته است اگر برای هر $x, y \in B$ ، داشته باشیم $x * y \in B$ •

تذکر:

فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی روی A باشد و زیر مجموعه B از A تحت عمل $*$ بسته باشد • در اینصورت تابع القاشده از $*$ روی $B \times B$ یعنی $* \mid B \times B$ یک تابع از $B \times B$ به B است • پس می‌توان گفت که در اینصورت $* \mid B \times B$ یک عمل دوتایی روی B است • معمولاً عمل $* \mid B \times B$ را با همان نماد $*$ نشان می‌دهیم و می‌گوئیم که اگر زیر مجموعه B از A تحت عمل $*$ بسته باشد ، آنگاه می‌توان $*$ را بعنوان یک عمل دوتایی روی B در نظر گرفت •

۶-۱-۷ : مثال :

(الف) عمل $+$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم • می‌دانیم که اگر x و $y \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $x + y \in \mathbb{N}$ • پس می‌توان گفت که زیر مجموعه $\mathbb{N}$ از $\mathbb{R}$ تحت عمل $+$ بسته است •

(ب) عمل $+$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم • فرض کنیم E مجموعه همه اعداد زوج در $\mathbb{N}$ باشد • در اینصورت چون حاصلجمع دو عدد زوج یک عدد زوج است، پس برای هر $x, y \in E$ داریم $x + y \in E$ • پس E تحت عمل $+$ بسته است • حال

فرض کنیم F مجموعه همه اعداد فرد در $\mathbb{N}$ باشد • چون حاصلجمع دو عدد فرد یک عدد زوج است ، پس F تحت عمل + بسته نیست •

(ج) در ۲-۱-٦ (د) ، دیدیم که اگر A یک مجموعه باشد ، آنگاه عمل ترکیب توابع یعنی $\circ$ یک عمل دوتایی روی A_A است • اگر مانند ۲-۱-٦ (هـ) ، S_A مجموعه همه توابع دوسویی روی A باشد ، آنگاه $S_A \subseteq A_A$ و دیدیم که S_A تحت عمل $\circ$ بسته است •

<u>۸-۱-٦ : تمرین :</u>

در هریک از بندهای زیر تعیین کنید که آیا زیر مجموعه $\times$ تحت عمل مربوطه بسته است یا خیر•

(الف) عمل جمع روی $\mathbb{Z}$ و $\times$ مجموعه اعداد منفی در $\mathbb{Z}$ است•

(ب) عمل ضرب روی $\mathbb{R}$ و $\times$ مجموعه همه اعداد اصم در $\mathbb{R}$ است•

(ج) عمل جمع روی $\mathbb{R}$ و $\times$ مجموعه همه اعداد اصم در $\mathbb{R}$ است •

(د) عمل $\wedge$ روی مجموعه همه گزاره ها و $\times$ مجموعه همه گزاره های درست است •

(هـ) عمل $\cup$ روی $\mathcal{P}(A)$ که درآن A یک مجموعه است و $\times$ مجموعه همه زیر مجموعه های متناهی از A می‌باشد •

(و) عمل $\cup$ روی $\mathcal{P}(A)$ که درآن A یک مجموعه نامتناهی‌است و $\times$ مجموعه همه زیر مجموعه های شمارش پذیر از A می‌باشد •

(ز) عمل $\cap$ روی $\mathcal{P}(A)$ که درآن A یک مجموعه است بطوریکه $\operatorname{card} A \geqslant ۲$ و $\times$ مجموعه همه زیر مجموعه های غیر تهی از A می‌باشد •

<u>تذکر :</u>

فرض کنیم $A = \{۱ , \ldots\ldots , n\}$ • در اینصورت مجموعه همه توابع دوسویی روی A را معمولاً با S_n نشان می‌دهند و همچنین هر عنصر $f \in S_n$ را معمولاً بانماد $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ f(۱) & f(۲) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهند • مثلاً اگر $n = ۳$ و $f \in S_۳$ بطوریکه

$f(1)=2$ ، $f(2)=3$ و $f(3)=1$ ، آنگاه f بصورت زیر نمایش داده می‌شود :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

۶-۱-۹ : تمرین :

فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و مجموعه همه توابع دوسویی روی A، یعنی S_3 را در نظر بگیرید .

(الف) توسط یافتن همه عناصر S_3 و نمایش آنها بصورت نمادی که در تذکر فوق معرفی گردید ، نشان دهید که $card\ S_3=6$.

(ب) عمل ترکیب توابع یعنی ، $\circ$ را روی S_3 در نظر بگیرید و جدول آنرا تشکیل دهید.

(ج) چه رابطه ای بین جدول این تمرین وجدول تعیین شده در ۶-۱-۵ وجود دارد؟

۶-۱-۱۰ : تعریف : فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه A باشد. دراینصورت،

(الف) $*$ یک عمل شرکت پذیر نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y,z\in A$ داشته باشیم .

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

(ب) $*$ یک عمل جابجائی نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم،

$$x*y=y*x$$

۶-۱-۱۱ : مثال :

(الف) عمل جمع روی N شرکت پذیر و جابجائی است . زیرا که برای هر $x,y,z\in N$ داریم :

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

و

$$x+y=y+x$$

(ب) عمل ضرب روی R شرکت پذیر و جابجائی است . زیرا که برای هر $x,y,z\in R$ داریم :

$$(xy)z = x(yz)$$

و

$$xy = yx$$

(ج) فرض کنیم A یك مجموعه باشد وعمل ترکیب توابع را روی A_A در نظربیگیریم • در اینصورت بنا به بند (الف) تذکر بعداز ۱۰-۱-۳، عمل $\circ$ شرکت‌پذیر است • ولی عمل $\circ$ درحالت عومی جابجائی نیست، زیرا که مثلاً در ۱۰-۱-۳ (الف) ملاحظه می‌شودکه $g \circ f \neq f \circ g$ •

(د) اگر A یك مجموعه باشد ، آنگاه $\cup$ و $\cap$ هر دو اعمال شرکت پذیر و جابجائی روی $\mathcal{P}(A)$ می‌باشند • زیرا که برای هر $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ داریم :

$$X \cup Y = Y \cup X \quad \text{و} \quad (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

و

$$X \cap Y = Y \cap X \quad \text{و} \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

(هـ) عمل تفاضل را روی $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم • در اینصورت این نه شرکت‌پذیر است ونه جابجائی • زیرا که مثلاً برای $۴, ۲, ۱ \in \mathbb{Z}$ داریم :

$$(۴-۲)-۱ = ۱ \neq ۳ = ۴-(۲-۱)$$

و

$$۲-۱ = ۱ \neq -۱ = ۱-۲$$

(و) عمل $*$ را روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x * y = x$$

در اینصورت $*$ شرکت‌پذیر است ولی جابجائی نیست • زیرا که برای هر $x, y, z \in \mathbb{N}$ داریم :

$$(x * y) * z = x * z = x$$

و

$$x * (y * z) = x * y = x$$

و در نتیجه $(x * y) * z = x * (y * z)$ و مثلاً برای $۲, ۱ \in \mathbb{N}$ داریم :

$$۱ * ۲ = ۱ \neq ۲ = ۲ * ۱$$

۱۱-۱-٦ : تمرین :

در هر یك از بند های زیر تعیین کنید که آیا عمل دوتایی مربوطه شرکت پذیر یا جابجایی هست یا خیر•

(الف) عمل $*$ روی $\mathbb{Q}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$x * y = \frac{x+y}{۲}$$

(ب) عمل $*$ روی $\mathbb{N}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$x * y = y$$

(ج) عمل $*$ روی $\mathbb{Z}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$x * y = x + y + xy$$

(د) عمل تقسیم روی $\mathbb{R} - \{0\}$ •

(هـ) عمل $*$ روی مجموعه همه نقاط یك صفحه که بصورت زیر تعریف می‌شود • برای هر دو نقطه x و y در صفحه داریم :

$$x * y = \overline{xy} \text{ نقطه وسط پاره خط }$$

(و) عمل $*$ روی $R^{۲}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$(x, y) * (x', y') = (xx' + xy' + x'y, yy')$$

(ز) $*$ روی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ که توسط جدول زیر داده شده است•

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	e	a	d
c	c	a	d	e	b
d	d	e	a	b	c
e	e	d	b	c	a

۱۲-۱-٦ : تعریف :

فرض کنیم $*_۱$ و $*_۲$ دو عمل دوتایی روی مجموعه A باشند • در اینصورت $*_۱$ نسبت به $*_۲$ پخشی است اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم :

$$x *_1 (y *_2 z) = (x *_1 y) *_2 (x *_1 z)$$

و

$$(x *_2 y) *_1 z = (x *_1 z) *_2 (y *_1 z)$$

۱۳-۱-۶ : مثال :

(الف) اعمال جمع و ضرب را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت ضرب نسبت به جمع پخش است ، زیرا که برای هر $x, y, z \in \mathbb{R}$ داریم :

$$x(y + z) = xy + z$$

و

$$(x + y)z = xz + yz$$

در این مثال ملاحظه می‌شود که جمع نسبت به ضرب پخش نیست ، زیرا که مثلاً برای $۳, ۲, ۱ \in \mathbb{R}$ داریم :

$$۱+(۲)(۳)=۶$$

و

$$(۱+۲)(۱+۳)=۱۲$$

و در نتیجه $۱+(۲)(۳) \neq (۱+۲)(۱+۳)$ •

(ب) فرض کنیم A یک مجموعه باشد و اعمال $\cup$ و $\cap$ را روی $\mathcal{P}(A)$ در نظر می‌گیریم • در اینصورت $\cap$ نسبت به $\cup$ پخش است، زیرا که برای هر $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ داریم :

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

و

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cup Z)$$

در این مثال ملاحظه می‌شود که $\cup$ نسبت به $\cap$ نیز پخش است، زیرا که داریم :

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

و

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

فرض کنیم $*_1$ و $*_2$ دو عمل دوتایی روی مجموعه A باشند • قضیه زیر نشان میدهد که اگر $*_1$ جابجایی باشد آنگاه برای پخش بودن $*_1$ نسبت به $*_2$ کافیست که یکی

از تساویهای ۱۲-۱-٦ برقرار باشد •

۱٤-۱-٦ : قضیه :

فرض کنیم $*_1$ $*_2$ در عمل دوتایی روی مجموعه A باشند و $*_1$ جابجایی باشد در اینصورت $*_1$ نسبت به $*_2$ پخش است اگر و فقط اگر برای هر $x,y,z \in A$ داشته باشیم :

$$x *_1 (y *_2 z) = (x *_1 y) *_2 (x *_1 z) \qquad (1)$$

یا

$$(x *_2 y) *_1 z = (x *_1 z) *_2 (y *_1 z) \qquad (2)$$

اثبات :

اگر $*_1$ نسبت به $*_2$ پخش باشد، آنگاه بنا به ۱۲-۱-٦، تساویهای (۱) و (۲) هر دو برقرارند •حال فرض کنیم که تساوی (۱) یا تساوی (۲) برقرار باشد •نشان میدهیم که $*_1$ نسبت به $*_2$ پخش است • مثلاً فرض کنیم تساوی (۱) برقرار باشد • نشان میدهیم که تساوی (۲) نیز برقرار است • فرض کنیم $x,y,z \in A$ •در اینصورت داریم :

بنا به جابجایی بودن $*_1$: $(x *_2 y) *_1 z = z *_1 (x *_2 y)$

بنا به تساوی (۱) : $= (z *_1 x) *_2 (z *_1 y)$

بنا به جابجایی بودن $*_1$: $= (x *_1 z) *_2 (y *_1 z)$

پس تساوی (۲) برقرار است و در نتیجه $*_1$ نسبت به $*_2$ پخش است• بطریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر تساوی (۲) برقرار باشد، آنگاه تساوی (۱) نیز برقرار است و در نتیجه $*_1$ نسبت به $*_2$ پخش می‌باشد •

۱۵-۱-٦ : تمرین :

(الف) عمل $*$ روی $\mathbb{N}$ را بصورت زیر در نظر بگیرید :

$$x * y = x$$

آیا * نسبت به عمل جمع پخشی است ؟

(ب) عمل * روی $\mathbb{Z}$ را بصورت زیر در نظر بگیرید :

$$x * y = x + y + xy$$

آیا * نسبت به عمل جمع پخشی است •

(ج) فرض کنید A یک مجموعه باشد و عمل * روی $\mathcal{P}(A)$ را بصورت زیر درنظر بگیرید :

$$X * Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

آیا عمل ∩ نسبت به * پخشی است ؟

(د) روی $\mathbb{R}^2$ دو عمل $*_1$ و $*_2$ را بصورت زیر تعریف کنید :

$$(x, y) *_1 (x', y') = (x + x', y + y')$$

و

$$(x, y) *_2 (x', y') = (xx', yy')$$

آیا $*_2$ نسبت به $*_1$ پخشی است ؟

۲-٦ : ساختمانهای جبری

بطور خلاصه می‌توان گفت که امروزه مطالعه ساختمانهای جبری، رشته جبر را تشکیل می‌دهد • در این قسمت پس از تعریف مفهوم کلی یک ساختمان جبری، بعضی از ساختمانهای جبری خاص را که اهمیت زیادی دارند ، معرفی خواهیم کرد •

٦-۲-۱ : تعریف :

فرض کنیم $*_1, \cdots, *_n$ اعمال دوتایی روی یک مجموعه A باشند • دراینصورت $(A ; *_1, \cdots, *_n)$ را یک ساختمان جبری می‌نامیم • پس یک ساختمان جبری از یک مجموعه و یک یا چند عمل روی آن مجموعه تشکیل شده است •

٦-۲-۲ : مثال :

(الف) $(\mathbb{N}, +)$ یک ساختمان جبری است •

(ب) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ که در آن " • " نمایش عمل ضرب می‌باشد ، یک ساختمان جبری است •

(ج) اگر A یك مجموعه و " o " عمل ترکیب توابع روی A_A باشد، آنگاه $(A_A ; o)$ یك ساختمان جبری است •

(د) اگر S_n مجموعه همه توابع دوسویی روی $\{1, \ldots, n\}$ باشد، آنگاه $(S_n ; o)$ یك ساختمان جبری است •

(هـ) اگر A یك مجموعه باشد، آنگاه $(\mathcal{P}(A) ; \cup , \cap)$ یك ساختمان جبری است•

(و) اگر P مجموعه همه گزاره ها باشد، آنگاه $(P ; \vee , \wedge)$ یك ساختمان جبری است •

(ز) اگر * عمل تعریف شده در ۳-۱-۶ (و) روی $\mathbb{Q}$ باشد، آنگاه $(\mathbb{Q} ; *)$ یك ساختمان جبری است •

(ح) فرض کنیم A یك مجموعه باشد و $A_{\mathbb{R}}$ مجموعه همه توابع از A به $\mathbb{R}$ است •دوعمل $*_1$ و $*_2$ را روی $A_{\mathbb{R}}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f *_1 g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f *_1 g)(x) = f(x) + g(x)$$

و

$$f *_2 g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f *_2 g)(x) = f(x)\, g(x)$$

دراینصورت $(A_{\mathbb{R}} ; *_1 , *_2)$ یك ساختمان جبری است •

(ط) فرض کنیم $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots\ldots\ldots [n-1]\}$ مجموعه تعریف شده در ۴-۱-۱۸ (د) باشد • دوعمل $\oplus$ و $\odot$ را روی $\mathbb{Z}_n$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[x] \oplus [y] = [x+y]$$

و

$$[x] \odot [y] = [xy]$$

دراینصورت $(\mathbb{Z}_n ; \oplus , \odot)$ یك ساختمان جبری است •

<u>۳-۲-۶ : تمرین</u> : نشان دهیدکه :

(الف) اعمال $*_1$ و $*_2$ در ۳-۲-۶ (ح)، شرکت‌پذیر و جابجائی هستند و $*_2$ نسبت به $*_1$ پخشی می‌باشد •

(ب) اعمال $\oplus$ و $\odot$ در ۲-۲-۶ (ط) شرکت پذیر و جابجائی هستند و $\odot$ نسبت به $\oplus$ پخش می‌باشد •

<u>۴-۲-۶ : تعریف :</u>

فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه A باشد • عنصر $e \in A$ را یک عنصر همانی A نسبت به عمل $*$ می‌نامیم اگر برای همه $x \in A$ داشته باشیم :

$$x * e = e * x = x$$

همچنین می‌توان گفت که e عنصر همانی ساختمان $(A ; *)$ است •

<u>۵-۲-۶ : مثال :</u>

(الف) ساختمان جبری $(\mathbb{Z} ; +)$ را درنظر می‌گیریم • دراینصورت عدد 0 عنصر همانی $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل $+$ است • زیرا که برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم :

$$x + 0 = 0 + x = x$$

(ب) ساختمان جبری $(A_A ; \circ)$ در ۲-۲-۶ (ج) را درنظر می‌گیریم • دراینصورت تابع همانی یعنی i_A عنصر همانی این ساختمان است • زیرا که برای هر $f \in {}^A A$ داریم :

$$i_A \circ f = f \circ i_A = f$$

(ج) ساختمان جبری $(\mathbb{R} ; \cdot)$ را درنظر می‌گیریم • دراینصورت عدد 1 عنصر همانی این ساختمان است • زیرا که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم :

$$x . 1 = 1 . x = x$$

(د) ساختمان $(\mathbb{R}^2 ; *)$ را که درآن عمل $*$ روی $\mathbb{R}^2$ بصورت زیر تعریف می‌شود درنظر می‌گیریم •

$$(x , y) * (x' , y') = (x + x' , y + y')$$

دراینصورت ، $(0 , 0)$ عنصر همانی $\mathbb{R}^2$ نسبت به عمل $*$ است • زیرا که برای هر $(x , y) \in \mathbb{R}^2$ داریم :

$$(x , y) * (0 , 0) = (x + 0 , y + 0) = (x , y)$$

$$(0 , 0) * (x , y) = (0 + x , 0 + y) = (x , y)$$

(هـ) ساختمان جبری $(\mathcal{P}(A) ; \cap)$ را که در آن A یک مجموعه است، در نظر می‌گیریم • در اینصورت A عنصر همانی این ساختمان است• زیرا که برای هر $X \in \mathcal{P}(A)$ داریم :

$$X \cap A = A \cap X = X$$

__۶-۲-۶ : تمرین :__

تعیین کنید که آیا هر یک از ساختمان های جبری زیر عنصرهمانی داردیاخیر•

(الف) $(\mathbb{N} ; +)$ •

(ب) $(\mathbb{N} ; \cdot)$ •

(ج) $(S_n ; \circ)$ در تذکر بعداز ۸-۱-۶ •

(د) $(\mathbb{A} ; *)$ در ۳-۱-۶ (و) •

(هـ) $(\mathcal{P}(A) ; *)$ در ۴-۱-۶ (د) •

(و) $(\mathcal{P}(A) ; \cup)$ •

(ز) $(D_4 ; \circ)$ در ۵-۱-۶ •

(ح) $(E ; +)$ که در آن E مجموعه اعداد زوج در $\mathbb{N}$ است•

(ط) $(A_{\mathbb{R}} ; *_1)$ و $(A_{\mathbb{R}} ; *_2)$ در ۲-۲-۶ (ح)

(ی) $(\mathbb{Z}_n ; \oplus)$ و $(\mathbb{Z}_n ; \odot)$ در ۲-۲-۶ (ط)•

__۷-۲-۶ : قضیه :__

اگر یک ساختمان جبری $(A ; *)$ دارای عنصر همانی باشد ، آنگاه این عنصر یکتاست •

اثبات :

فرض کنیم e_1 و e_2 دو عنصر همانی $(A, *)$ باشند • نشان میدهیم که $e_1 = e_2$ • چون e_1 عنصر همانی $(A, *)$ است و $e_2 \in A$ ، پس $e_1 * e_2 = e_2$ •
چون e_2 عنصر همانی $(A, *)$ است و $e_1 \in A$ ، پس $e_1 * e_2 = e_1$ • بنابراین $e_1 = e_2$ و در نتیجه عنصر همانی در صورت وجود ، یکتاست •

تذکر :

فرض کنیم $(A, *)$ یك ساختمان جبری و B تحت عمل $*$ یك زیر مجموعه بسته از A باشد • در اینصورت همانطوریکه در تذکر بعد از ٦-١-٦ گفته شد ، $*$ را میتوان بعنوان یك عمل دوتایی روی B در نظر گرفت و در نتیجه $(B, *)$ یك ساختمان جبری است • در اینصورت $(B, *)$ یك زیر ساختمان جبری $(A, *)$ میباشد •

٦-٢-٨ : قضیه :

فرض کنیم $(A, *)$ یك ساختمان جبری و B تحت عمل $*$ یك زیر مجموعه بسته از A باشد • در اینصورت :

(الف) اگر $*$ روی A شرکت پذیر باشد ، آنگاه $*$ روی B شرکت پذیر است •

(ب) اگر $*$ روی A جابجائی باشد ، آنگاه $*$ روی B جابجائی است •

اثبات :

(الف) فرض کنیم $x, y, z \in B$ • در اینصورت ، چون $B \subseteq A$ ، پس $x, y, z \in A$ و چون $*$ روی A شرکت پذیر است • پس داریم :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

بنابراین $*$ روی B شرکت پذیر است •

(ب) اثبات این بند مشابه اثبات بند (الف) است و بعنوان تمرین آنرا بنویسید •

۹-۲-٦ : تمرین :

(الف) ساختمان جبری $(\mathbb{R}^2 ; *_1 , *_2)$ در ۱۵-۱-٦ (د) را در نظر بگیرید.
فرض کنید :

$$B = \{(x , 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

نشان دهید که B تحت هر دو عمل $*_1$ $*_2$ بسته است. ساختمان جبری $(B ; *_1 \; *_2)$ را در نظر بگیرید و عنصر همانی B نسبت به $*_1$ و عنصر همانی B نسبت به $*_2$ را در صورت وجود ، تعیین کنید.

(ب) ساختمان جبری $(\mathbb{R} ; + , \cdot)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \mid x , y \in \mathbb{Q}\}$$

نشان دهید که $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ تحت هر دو عمل $+$ ، $\cdot$ بسته است. ساختمان جبری $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) ; + , \cdot)$ را در نظر بگیرید و عناصر همانی $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ نسبت به هر دو عمل $+$ ، $\cdot$ را در صورت وجود ، تعیین کنید.

۱۰-۲-٦ : تعریف :

فرض کنیم ساختمان جبری $(A , *)$ دارای عنصر همانی e باشد و $\alpha \in A$.
اگر در مجموعه A عنصری مانند α' وجود داشته باشد بطوریکه :

$$\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e$$

آنگاه α' یك معکوس α نامیده میشود و در اینصورت میگوئیم α دارای معکوس است.

تذکر:

از تعریف فوق روشن استکه ، اگر $(A ; *)$ یك ساختمان جبری با عنصر همانی و $\alpha' \in A$ یك معکوس $\alpha \in A$ باشد ، آنگاه α یك معکوس α' است.

۱۱-۲-٦ : مثال :

(الف) اگر $(A ; *)$ یك ساختمان جبری با عنصر همانی e باشد ، آنگاه e دارای

معکوس است ؛ زیرا که داریم : $e * e = e$

و در نتیجه e یک معکوس e است .

(ب) ساختمان جبری $(\mathbb{Z} ; +)$ را در نظر می‌گیریم . در اینصورت عدد ۰ عنصر همانی این ساختمان است . بعلاوه هر عنصر $x \in \mathbb{Z}$ دارای معکوس $-x$ است . زیرا که داریم :

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

(ج) در ساختمان جبری $(\mathbb{N} ; \cdot)$ تنها عنصری که دارای معکوس است عنصر همانی ساختمان یعنی عدد ۱ می‌باشد .

(د) در ساختمان جبری $(\mathcal{P}(A) ; \cup)$ تنها عنصری که دارای معکوس است عنصر همانی ساختمان یعنی ϕ می‌باشد .

(هـ) ساختمان جبری $(\mathcal{P}(A) ; *)$ در ۴-۱-۶ (د) را در نظر می‌گیریم . در اینصورت ϕ عنصر همانی این ساختمان است . در اینصورت هر عنصر $\mathcal{P}(A)$ دارای معکوس است ، زیرا که برای هر $X \in \mathcal{P}(A)$ داریم :

$$X * X = (X - X) \cup (X - X) = \phi \cup \phi = \phi$$

در این مثال ملاحظه می‌شود که هر عنصر معکوس خودش است .

<u>۱۲-۲-۶ : تمرین :</u>

در هر یک از ساختمانهای جبری زیر عناصری که دارای معکوس هستند را ، تعیین نمایید .

(الف) $(\mathbb{Z} ; \cdot)$.

(ب) $(\mathbb{Z}_4 ; \oplus)$.

(ج) $(\mathbb{Z}_4 ; \odot)$.

(د) $(S_3 ; \circ)$ در ۹-۱-۶ .

(هـ) $(\mathbb{N} \cup \{0\} ; +)$.

(و) $(\mathcal{P}(A) ; \cap)$ •

(ز) $(A ; \ast)$ در ۱۱-۱-٦ (ز) •

۱۳-۲-٦ : قضیه :

فرض کنیم $(A ; \ast)$ یك ساختمان جبری با عنصر همانی e میباشدو $\ast$ روی A شرکت پذیر است • در اینصورت برای هر $\alpha \in A$ ، اگر α دارای معکوس باشد ، آنگاه معکوسش یکتاست •

اثبات :

فرض کنیم α' و α'' دو عنصر در A باشند بطوریکه هردو معکوسهای α میباشند یعنی داریم :

$$\alpha \ast \alpha' = \alpha' \ast \alpha = e \qquad (1)$$

و

$$\alpha \ast \alpha'' = \alpha'' \ast \alpha = e \qquad (2)$$

نشان می دهیم که $\alpha' = \alpha''$.

بنابه همانی بودن e : $\alpha' = e \ast \alpha'$

بنابه (۲) : $= (\alpha'' \ast \alpha) \ast \alpha'$

بنا به شرکت پذیری $\ast$: $= \alpha'' \ast (\alpha \ast \alpha')$

بنا به (۱) : $= \alpha'' \ast e$

بنا به همانی بودن e : $= \alpha''$

پس معکوس α در صورت وجود یکتاست •

۱٤-۲-٦ : تمرین :

در هریك از ساختمانهای جبری زیر، نشان دهیدکه هر عنصر دارای معکوس است و معکوس هر عنصر رابرحسب آن عنصر تعیین کنید •

(الف) $(\mathbb{Q} - \{0\} ; \cdot)$

(ب) $(S_A ; \circ)$ در ۱-۱-۶ (هـ)٠
(ج) $(\mathbb{R}-\{o\} ; \div)$ که در آن " $\div$ " نمایشگر عمل تقسیم روی $\mathbb{R}-\{o\}$ است٠
(د) $(\mathbb{R}^n ; *)$ در ۲-۱-۶ (و)٠

<u>تذکر :</u>

در ساختمان های جبری معمولاً برای نمایش اعمال دوتایی از همان نماد های جمع و ضرب معمولی یعنی " + " و " ٠ " استفاده می‌شود ٠ این امر برای ایجاد سهولت در کار و اجتناب از تعدد نماد های مختلف برای نمایش اعمال دوتایی می‌باشد٠ در رابطه با این نمادگذاری چندین نکته وجود دارد که در زیر به بیان آنها می‌پردازیم ٠

(الف) اگر عمل دوتایی یک ساختمان جبری با نماد " + " نمایش داده شود، آنگاه آن ساختمان را یک ساختمان جبری جمعی می‌نامیم ٠ پس $(A ; +)$ یک ساختمان جبری جمعی است ٠

(ب) ساختمان جبری جمعی $(A ; +)$ را در نظر می‌گیریم ٠ اگر این ساختمان دارای عنصر همانی باشد، آنگاه این عنصر که بنا به ۷-۲-۶، یکتاست، معمولاً با نماد " ٥ " نمایش داده می‌شود ٠

(ج) اگر $(A ; +)$ یک ساختمان جبری جمعی با عنصر همانی o و + روی A شرکت پذیر باشد و اگر عنصر $\alpha \in A$ دارای معکوس باشد، آنگاه معکوس α که بنا به ۱۳-۲-۶ یکتاست، معمولاً با نماد " $-\alpha$ " نمایش داده می‌شود ٠

(د) اگر عمل دوتایی یک ساختمان جبری با نماد " ٠ " نمایش داده شود، آنگاه آن ساختمان را یک ساختمان جبری ضربی می‌نامیم ٠ پس $(A ; \cdot)$ یک ساختمان جبری ضربی است٠ در ساختمانهای جبری ضربی، گاهی از نوشتن نماد " ٠ " بین عناصر A خودداری می‌شود ٠ یعنی اگر $x, y \in A$، آنگاه xy بجای $x \cdot y$ نوشته می‌شود ٠

(هـ) ساختمان جبری ضربی $(A ; \cdot)$ را در نظر می‌گیریم ٠ اگر این ساختمان دارای عنصر همانی باشد، آنگاه این عنصر که بنا به ۷-۲-۶، یکتاست، معمولاً با نماد " ۱ " نمایش داده می‌شود ٠

(و) اگر (A ؛ $\cdot$) یك ساختمان جبری ضربی با عنصر همانی ۱ و $\cdot$ روی A شرکت پذیر باشد و اگر عنصر $\alpha \in A$ دارای معکوس باشد ، آنگاه معکوس α که بنابه ۱۳-۲-۶ یکتاست ، معمولاً با نماد " α^{-1} " نمایش داده می‌شود ٠

<u>۱۵-۲-۶ : مثال :</u>

(الف) ساختمان جبری ($\mathbb{R}^2$ ؛ $*_1$ و $*_2$) در ۱۵-۱-۶ (د) را در نظر می‌گیریم در این مثال چون $*_1$ برحسب جمع در $\mathbb{R}$ و $*_2$ برحسب ضرب در $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود ، می‌توان بترتیب آنها را با نمادهای " + " و " $\cdot$ " نمایش داد و در اینصورت نوشت :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

و

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

البته توجه می‌کنیم که دو جمع موجود کاملاً متفاوتند ، زیرا که جمع در $\mathbb{R}$ یک عمل دوتایی است که روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود و جمع در $\mathbb{R}^2$ یك عمل دوتایی است که روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود ٠ همینطور دو ضرب موجود کاملاً متفاوتند ٠ در اینصورت ($\mathbb{R}^2$ ؛ +) یك ساختمان جبری جمعی و ($\mathbb{R}^2$ ؛ $\cdot$) یك ساختمان جبری ضربی می‌باشند ٠ عنصر همانی ($\mathbb{R}^2$ ؛ +) راکه (٥ و ٥) است می‌توان آنرا با ٥ نمایش داد ٠ برای هر $\mathbb{R} \ni (x, y)$ ، عنصر ($-x, -y$) معکوس آن نسبت به عمل + است و در نتیجه می‌توان آنرا با (x, y) - نشان داد ٠ عنصر همانی ($\mathbb{R}^2$ ؛ $\cdot$) را که (۱ و ۱) است می‌توان آنرا با ۱ نمایش داد ٠ برای هر $\mathbb{R} \ni (x, y)$ بطوریکه $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ، عنصر ($1/x$ و $1/y$) معکوس آن نسبت به عمل $\cdot$ است و در نتیجه می‌توان آنرا با $(x, y)^{-1}$ نشان داد ٠

(ب) ساختمان جبری ($\mathbb{R}^A$ ؛ $*_1$ و $*_2$) در ۲-۲-۶ (ح) را در نظر می‌گیریم ٠ در این مثال می‌توان $*_1$ و $*_2$ را بترتیب با نمادهای + و $\cdot$ نمایش داد و در اینصورت نوشت :

$$f+g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

و

$$fg : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

در اینصورت $({}^{A}\mathbb{R}\ ;\ +)$ و $({}^{A}\mathbb{R}\ ;\ \cdot)$ بترتیب یک ساختمان جبری جمعی و یک ساختمان جبری ضربی میباشند • عنصر همانی $({}^{A}\mathbb{R}\ ;\ +)$ تابعی از A به $\mathbb{R}$ است که همه عناصر A را به عدد صفر در $\mathbb{R}$ میفرستد • اگر این تابع را با 0 نمایش دهیم ، آنگاه :

$$0 : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$0(x) = 0$$

روشن است که برای هر $f \in {}^{A}\mathbb{R}$ داریم $f+0=0+f=f$ • اگر $f \in {}^{A}\mathbb{R}$ ، آنگاه تابع $-f$ از A به $\mathbb{R}$ که بصورت زیر تعریف میشود ، معکوس f نسبت به عمل $+$ است •

$$-f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(-f)(x) = -f(x)$$

عنصر همانی $({}^{A}\mathbb{R}\ ;\ \cdot)$ تابعی از A به $\mathbb{R}$ است که همه عناصر A را به عدد 1 در $\mathbb{R}$ میفرستد • اگر این تابع را با 1 نمایش دهیم ، آنگاه :

$$1 : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$1(x) = 1$$

روشن است که برای هر $f \in {}^{A}\mathbb{R}$ داریم $f1 = 1f = f$ • اگر $f \in {}^{A}\mathbb{R}$ و $f(x) \neq 0$ برای هر $x \in A$ آنگاه تابع f^{-1} از A به $\mathbb{R}$ که بصورت زیر تعریف میشود ، معکوس f نسبت به عمل $\cdot$ است •

$$f^{-1} : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f^{-1}(x) = 1/f(x)$$

در این مثال ممکن است که احساس شود یک تضاد نمادی بوجود آمده است • زیرا که قبلاً نماد f^{-1} را بعنوان تابع معکوس تابع f بکار بردیم و در این مثال f^{-1} معنی دیگری دارد • در چنین حالاتی بهتر است که نماد دیگری اختیار شود • مثلاً در این مثال

می‌توان بجای نماد f^{-1} برای نمایش معکوس عنصر $f \in {}^{A}\mathbb{R}$ نسبت به عمل ضرب ، از نماد f' استفاده شود •

(ج) ساختمان ($\mathbb{Q}$ ؛ *) را در ۳-۱-٦ (و) در نظر می‌گیریم • در این مثال ملاحظه می‌شود که عمل * بر حسب عمل جمع در $\mathbb{Q}$ تعریف شده است و اگر بخواهیم این عمل را توسط نماد " + " نمایش دهیم ، آنگاه ممکن است دچار سر درگمی شویم، زیرا که هردو عمل * و + روی $\mathbb{Q}$ تعریف شده اند • پس در این مثال بهتر است که همان نماد " * " برای نمایش این عمل حفظ شود •

بنابراین تذکر بعد از ١٤-٢-٦ را باید با درنظر گرفتن ملاحظاتی بکاربرد•

<u>١٦-٢-٦ : تمرین :</u>

(الف) ساختمان جبری جمعی (A ؛ +) با عنصر همانی o را در نظر بگیرید •فرض کنید که + شرکت پذیر است و عناصر a ، b در A دارای معکوس هستند• در اینصورت نشان دهید که $-(-a)=a$ و $-(a+b)=(-b)+(-a)$

(ب) ساختمان جبری ضربی (A ؛ •) با عنصر همانی ۱ را در نظر بگیرید •فرض کنید که • شرکت پذیر است و عناصر a و b در A دارای معکوس هستند • در اینصورت نشان دهید که $(a^{-1})^{-1}=a$ و $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ •

حال بعضی از ساختمانهای جبری خاص را که از اهمیت زیادی برخوردارند ، معرفی می‌کنیم •

<u>١٧-٢-٦ : تعریف :</u>

ساختمان جبری (G ، *) را یک گروه می‌نامیم ، اگرداشته باشیم :

(الف) * شرکت پذیر باشد ؛

(ب) G نسبت به * عنصر همانی داشته باشد ؛

(ج) هرعنصر G دارای معکوس باشد •

<u>١٨-٢-٦ : تعریف :</u> گروه (G ، *) یک گروه آبلی نامیده می‌شود اگر * جابجایی باشد•

۶-۲-۱۹ : مثال :

(الف) $(\mathbb{Z}\,;+)$ یک گروه آبلی است• زیرا که ، + شرکت‌پذیر است ، 0 عنصر همانی است ، برای هر $n\in\mathbb{Z}$ ، $-n$ معکوس n است و + جابجایی است•

(ب) $(\mathbb{R}-\{0\}\,;\,\cdot)$ یک گروه آبلی است• زیرا که • شرکت‌پذیر است ، ۱ عنصر همانی است ، برای هر $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ، $1/x$ معکوس x است و • جابجایی است •

(ج) اگر عمل $\oplus$ را روی $\mathbb{Z}_n$ در ۶-۲-۲ (ط) با نماد + نمایش دهیم ، آنگاه $(\mathbb{Z}_n;+)$ یک گروه آبلی است• زیرا که ، + شرکت‌پذیر است ، $[0]$ عنصرهمانی است ، برای هر $[x]\in\mathbb{Z}_n$ ، $[n-x]$ معکوس $[x]$ است و + جابجایی است •

(د) $(S_A;\circ)$ در ۶-۱-۲ (هـ) یک گروه است • زیرا که ، $\circ$ شرکت‌پذیر است ، تابع همانی i_A عنصر همانی است و برای هر $f\in S_A$ ، تابع معکوس تابع f یعنی f^{-1}، معکوس f نسبت به $\circ$ است • در این مثال ملاحظه می‌شود که عمل $\circ$ لزوماً جابجایی نیست و در نتیجه گروه $(S_A;\circ)$ لزوماً آبلی نمی‌باشد •

۶-۲-۲۰ : تمرین :

کدامیک از ساختمانهای جبری زیر گروه است ؟ سپس تعیین کنید کدامیک از ساختمانهایی که گروه است ، آبلی نیز می‌باشد •

(الف) $(\mathbb{N}\cup\{0\};+)$ •

(ب) $(\mathbb{N}\,;\,\cdot)$ •

(ج) $(\mathbb{Z}\,;*)$ در ۶-۱-۲ (ب) •

(د) $(D_3\,;\circ)$ در ۶-۱-۵ •

(هـ) $(E\,;+)$ که در آن E مجموعه اعداد زوج در $\mathbb{Z}$ است•

(و) $(\mathcal{P}(A);\cup)$ •

(ز) $(\mathcal{P}(A);\cap)$ •

(ح) $(\mathcal{P}(A) ; *)$ در ۴-۱-۶ و د)٠

(ط) $(\mathbb{Q} ; *)$ در ۱۱-۱-۶ (الف) ٠

(ی) $(S_3 ; \circ)$ در ۹-۱-۶ ٠

۲۱-۲-۶ : قضیه : فرض کنیم $(G ; *)$ یک گروه است ٠ در اینصورت :

(الف) عنصر همانی $(G ; *)$ یکتاست ٠

(ب) معکوس هر عنصر در G یکتاست ٠

(ج) برای هر $a, x, y \in G$ داریم :

$$a * x = a * y \Longrightarrow x = y \qquad (1)$$

و

$$x * a = y * a \Longrightarrow x = y \qquad (2)$$

اثبات

(الف) چون $(G ; *)$ یک ساختمان جبری است، پس بنا به ۷-۲-۶، عنصر همانی آن یکتاست ٠

(ب) چون $*$ شرکت پذیر است ، پس بنا به ۱۳-۲-۶، معکوس هر عنصردر G یکتاست ٠

(ج) جمله (۱) را اثبات می کنیم ٠ فرض کنیم e عنصر همانی $(G ; *)$ و a' معکوس a باشد ٠

$$a * x = a * y \Longrightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

بنا به شرکت پذیر بودن $*$:

$$\Longrightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y$$

بنا به ۱۰-۲-۶:
$$\Longrightarrow e * x = e * y$$

بنابه ۴-۲-۶:
$$\Longrightarrow x = y$$

جمله (۲) بطریق مشابه اثبات می‌شود و بعنوان تمرین است ٠

تذکر:

جملات (۱) و (۲) در ۶-۲-۲۱ (ج)، قوانین حذف نامیده می‌شود و از قضیه فوق نتیجه می‌شود که قوانین حذف در یک گروه برقرارند •

۶-۲-۲۲ : قضیه :

ساختمان $(A ; *_1 \text{ و } *_2)$ را در نظر می‌گیریم • فرض کنیم $(A ; *_1)$ یک گروه و $*_2$ نسبت به $*_1$ پخش باشد • در اینصورت اگر e عنصر همانی $(A ; *_1)$ باشد، آنگاه برای هر $x \in A$ داریم :

$$x *_2 e = e *_2 x = e$$

اثبات : نشان دهیم که $x *_2 e = e$ چون $e *_1 e = e$ پس $x *_2 e = x *_2 (e *_1 e)$ چون $*_2$ نسبت به $*_1$ پخشی است، پس $x *_2 (e *_1 e) = (x *_2 e) *_1 (x *_2 e)$ و در نتیجه داریم :

$$x *_2 e = (x *_2 e) *_1 (x *_2 e) \qquad (1)$$

حال اگر $(x *_2 e)'$ معکوس $(x *_2 e)$ نسبت به عمل $*_1$ باشد، آنگاه داریم :

بنا به ۶-۲-۱۰ : $e = (x *_2 e)' *_1 (x *_2 e)$

بنا به تساوی (۱) : $= (x *_2 e)' *_1 [(x *_2 e) *_1 (x *_2 e)]$

بنا به شرکت‌پذیر بودن $*_1$: $= [(x *_2 e)' *_1 (x *_2 e)] *_1 (x *_2 e)$

بنا به ۶-۲-۱۰ : $= e *_1 (x *_2 e)$

بنا به ۶-۲-۴ : $= x *_2 e$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $e *_2 x = e$ و بعنوان تمرین است •

۶-۲-۲۳ : تمرین :

ساختمان $(A ; *_1 \text{ و } *_2)$ را در نظر بگیرید • فرض کنید $(A ; *_1)$

یك گروه است و $*_2$ نسبت به $*_1$ پخش می‌باشد • اگر معکوس هر عنصر $x \in A$ نسبت به عمل $*_1$ را با x' نشان داده شود، ثابت کنید که ، برای هر $x, y \in A$ داریم :

(الف) $(x *_2 y)' = x' *_2 y$ •

(ب) $(x *_2 y)' = x *_2 y'$ •

(ج) $x' *_2 y' = x *_2 y$ •

<u>۶-۲-۲۴ : تعریف :</u>

فرض کنیم $(G ; *)$ یك گروه باشد •فرض کنیم H یك زیر مجموعه G باشد ، بطوریکه تحت $*$ بسته است • در اینصورت $(H ; *)$ یك زیرگروه $(G ; *)$ نامیده می‌شود ، اگر $(H ; *)$ یك گروه باشد •

<u>۶-۲-۲۵ : مثال :</u>

(الف) $(\mathbb{Z} ; +)$ یك زیرگروه ، $(\mathbb{R} , +)$ است •

(ب) اگر E مجموعه اعداد زوج در $\mathbb{Z}$ باشد ، آنگاه $(E ; +)$ یك زیرگروه $(\mathbb{Z} ; +)$ است •

(ج) $(S_A ; \circ)$ در ۶-۱-۲ (هـ) یك زیرگروه ، گروه $(A_A ; \circ)$ در ۶-۱-۲ (د) است •

(د) فرض کنیم $(G ; *)$ یك گروه باشد • در اینصورت $(G ; *)$ یك زیرگروه $(G ; *)$ است • اگر e عنصر همانی G باشد ، آنگاه $(\{e\} ; *)$ یك زیر گروه $(G ; *)$ است • زیرا که $(\{e\} ; *)$ یك گروه است •

بنابراین هر گروهی لااقل دو زیرگروه دارد ، یکی خودش و دیگری زیر گروهی است که تنها عنصرش عنصر همانی گروه است • به این دو زیرگروه ، زیرگروههای بدیهی می‌گویند • اگر گروهی به غیر از زیر گروههای بدیهی ، زیرگروه داشته باشد ، آنگاه آن زیرگروه ، زیرگروه غیر بدیهی نامیده می‌شود • مثلاً $(E ; +)$ یك زیرگروه غیر بدیهی $(\mathbb{Z} ; +)$ است •

<u>۶-۲-۲۶ : تمرین :</u> در هریك از بند های زیر کدامیك از زیر ساختمانهای $(H ; *)$

یک زیر گروه ، گروه مربوطه می‌باشد ؟

(الف) گروه $(\mathbb{Z} ; +)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید ، $H = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(ب) گروه $(\mathbb{R} ; +)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید ، $H = \mathbb{Q}$.

(ج) گروه $(D_3 ; \circ)$ در ۵-۱-۶ را در نظر بگیرید و فرض کنید ، $H = \{e , r_1 , r_2\}$.

(د) گروه $(D_3 ; \circ)$ در ۵-۱-۶ را در نظر بگیرید و فرض کنید ، $H = \{e , r_1 , \alpha\}$.

(هـ) گروه $(\mathbb{R}^2 ; +)$ در ۱۵-۲-۶ (الف) را در نظر بگیرید و فرض کنید ،
$H = \{(x , 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

__۶-۲-۲۷ : قضیه :__

فرض کنیم $(G ; *)$ یک گروه و $(H ; *)$ یک زیر گروه $(G ; *)$ باشد .
در اینصورت :

(الف) اگر e عنصر همانی $(G ; *)$ باشد ، آنگاه e تنها عنصری در G با خاصیت $e * e = e$ می‌باشد .

(ب) اگر f عنصر همانی $(H ; *)$ باشد ، آنگاه $f = e$.

__اثبات :__

(الف) می‌دانیم که $e * e = e$. حال فرض کنیم x عنصری در G با خاصیت $x * x = x$ باشد . نشان می‌دهیم که ، $x = e$ فرض کنیم x' معکوس x باشد
در اینصورت داریم :

بنا به شرکت‌پذیر بودن $*$ و تساوی $x * x' = e$:

$$(x * x) * x' = x * x' \Longrightarrow x * (x * x') = e$$

بنا به تساوی $x * x' = e$: $\Longrightarrow x * e = e$

بنابه همانی‌بودن e : $\Longrightarrow x = e$

بنابراین e تنها عنصری در G است بطوریکه $e * e = e$.

(ب) چون f عنصرهمانی $(H ; *)$ است، پس $f * f = f$ وچون $f \in G$ ، پس بنا به بند (الف)، $f = e$.

<u>تذکر:</u>

(الف) از ۶-۲-۲۷ (ب)، نتیجه می‌شود که عنصر همانی یک زیرگروه، یک گروه، همان عنصرهمانی گروه است.

(ب) همانطوریکه در تذکر بعد از ۶-۲-۱۴ گفته شد، در ساختمانهای جبری معمولاً اعمال دوتایی را با نمادهای + و . نمایش می‌دهند. در اینصورت اگر $(G ; +)$ یک گروه باشد، آنگاه آنرا یک گروه جمعی و اگر $(G ; \cdot)$ یک گروه باشد، آنگاه آنرا یک گروه ضربی می‌نامیم. همانطوریکه در تذکر بعد از ۶-۲-۱۴ گفته شد، اگر $(G ; +)$ یک گروه جمعی باشد. آنگاه عنصر همانی را با 0 و معکوس هر عنصر x در G را با $-x$ نمایش می‌دهیم و اگر $(G ; \cdot)$ یک گروه ضربی باشد، آنگاه عنصر همانی را با 1 و معکوس هر عنصر x در G را با x^{-1} نمایش می‌دهیم.

<u>۶-۲-۲۸ : تمرین :</u> نشان دهیدکه زیرگروه یک گروه آبلی، یک گروه آبلی است.

<u>۶-۲-۲۹ : تعریف :</u>

فرض کنیم R یک مجموعه و + و . دو عمل دوتایی روی R باشند. در اینصورت ساختمان جبری $(R ; + ; \cdot)$ یک حلقه نامیده می‌شود، اگر داشته باشیم:

(الف) $(R ; +)$ یک گروه آبلی باشد،

(ب) عمل . شرکت‌پذیر باشد،

(ج) عمل . نسبت به عمل + پخشی باشد.

<u>تذکر:</u>

در تعریف فوق، چون $(R ; +)$ یک گروه جمعی است، پس بنابه تذکر بعد از

۶-۲-۲۷، عنصر همانی $(R;+)$ را با 0 نمایش داده وآنرا عنصر صفر R می‌نامیم• همچنین معکوس هر عنصر x در R نسبت به عمل $+$ را با $-x$ نمایش می‌دهیم•

۶-۲-۳۰: مثال:

(الف) $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ یك حلقه است• زیرا که $(\mathbb{Z}; +)$ یك گروه آبلی است، $\cdot$ شرکت‌پذیر است و $\cdot$ نسبت به $+$ پخش است•

(ب) $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ در ۶-۲-۱۵ (الف)، یك حلقه است، زیرا که $(\mathbb{R}^2; +)$ یك گروه آبلی است، $\cdot$ شرکت‌پذیر است و $\cdot$ نسبت به $+$ پخش است•

(ج) $({}^A\mathbb{R}; +, \cdot)$ در ۶-۲-۱۵ (ب)، یك حلقه است• این مطلب را در زیر نشان میدهیم نشان می‌دهیم،که $+$ شرکت‌پذیر است• فرض کنیم $f, g, h \in {}^A\mathbb{R}$• دراینصورت

$$dom((f+g)+h) = dom(f+(g+h)) = \mathbb{R}$$

وبعلاوه برای هر $x \in A$ داریم:

بنابه تعریف $+$ روی ${}^A\mathbb{R}$: $((f+g)h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$

بنا به تعریف $+$ روی ${}^A\mathbb{R}$: $= (f(x)+g(x)) + h(x)$

بنا به شرکت‌پذیربودن $+$ روی $\mathbb{R}$: $= f(x) + (g(x)+h(x))$

بنا به تعریف $+$ روی ${}^A\mathbb{R}$: $= f(x) + (g+h)(x)$

بنابه تعریف $+$ روی ${}^A\mathbb{R}$: $= (f+(g+h))(x)$

پس $(f+g)+h = f+(g+h)$ و در نتیجه $+$ روی ${}^A\mathbb{R}$ شرکت‌پذیر است• بنا به ۶-۲-۱۵ (ب)، $({}^A\mathbb{R}; +)$ دارای عنصر همانی 0 است و هرعنصر ${}^A\mathbb{R}$ نسبت به عمل $+$ دارای معکوس است• همچنین با ارائه بحثی مشابه ~~بحث ارائه شده~~ در بالا برای اثبات شرکت‌پذیربودن $+$، می‌توان نشان دادکه $+$ جابجایی است•
پس $({}^A\mathbb{R}; +)$ یك گروه آبلی می‌باشد• بااثباتی مشابه اثبات بالا برای شرکت‌پذیر بودن $+$، می‌توان نشان دادکه $\cdot$ شرکت‌پذیر است• حال نشان می‌دهیم که $\cdot$ نسبت به $+$ پخشی است• برای هر $f, g, h \in {}^A\mathbb{R}$ داریم:

$$dom\,(f\,(g+h)) = dom\,(fg+fh) = A$$

وبعلاوه برای هر $x \in A$ داریم :

بنا به تعریف $\cdot$ روی $A_{\mathbb{R}}$: $\quad (f\,(g+h))(x) = (f(x))((g+h)(x))$

بنا به تعریف $+$ روی $A_{\mathbb{R}}$: $\quad = (f(x))(g(x)+h(x))$

بنا به پخشی بودن $\cdot$ نسبت به $+$ روی $\mathbb{R}$: $\quad = f(x)g(x)+f(x)h(x)$

بنا به تعریف $\cdot$ روی $A_{\mathbb{R}}$: $\quad = (fg)(x)+(fh)(x)$

بنا به تعریف $+$ روی $A_{\mathbb{R}}$: $\quad = (fg+fh)(x)$

پس $f(g+h) = fg+fh$ ، بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $(f+g)h = fh+gh$ ودر نتیجه $\cdot$ نسبت به $+$ روی $A_{\mathbb{R}}$ پخشی است .

پس $(A_{\mathbb{R}} ;+ , \cdot)$ یک حلقه است .

(د) اگر E مجموعه اعداد زوج در $\mathbb{Z}$ باشد ، آنگاه $(E ;+ , \cdot)$ یک حلقه است . زیرا که $(E ;+)$ یک گروه آبلی است ، $\cdot$ شرکت‌پذیر است و $\cdot$ نسبت به $+$ پخشی است .

<u>۳۱-۲-۶ : تمرین :</u> کدامیک از ساختمانهای جبری زیر یک حلقه است؟

(الف) $(\mathbb{R} ;+ , \cdot)$.

(ب) $(\mathbb{N} \cup \{0\} ;+ , \cdot)$.

(ج) $(\mathbb{Z}_n ;+ , \cdot)$ در ۲-۲-۶ (ط) ، که درآن $+$ و $\cdot$ بجای $\oplus$ و $\odot$ بکار رفته اند .

(د) $(\mathbb{Z} ;- , \cdot)$ که درآن " $-$ " نمایشگر عمل تفاضل است .

(هـ) $(\mathcal{P}(A) ;\cup , \cap)$.

(و) $(\mathcal{P}(A) ;+ , \cdot)$ که درآن $+$ و $\cdot$ روی $\mathcal{P}(A)$ بصورت زیر تعریـــــف

می‌شونـــد :

$$X + Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

و

$$XY = X \cap Y$$

(ز) $(G ; + , \cdot)$ که درآن $(G ; +)$ یک گروه آبلی است و عمل $\cdot$ روی G بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$xy = 0$$

که درآن 0 عنصرهمانی $(G ; +)$ است •

۶-۲-۳۲ : قضیه : فرض کنیم $(R ; + , \cdot)$ یک حلقه باشد •در اینصورت برای هر $x , y \in R$ داریم :

(الف) $x0 = 0x = 0$ ، که درآن 0 عنصر همانی $(R ; +)$ است•

(ب) $(-x)y = x(-y) = -(xy)$

(ج) $(-x)(-y) = xy$

اثبـات :

(الف) بنا به ۶-۲-۲۲ •

(ب) بنابه ۶-۲-۲۳ (الف) و (ب) •

(ج) بنا به ۶-۲-۲۳ (ج) •

۶-۲-۳۳ : تمرین :

فرض کنید $(R ; + , \cdot)$ یک حلقه باشد • عمل تفاضل روی R را که با نمـاد " - " نمایش داده می‌شود ، بصورت زیر تعریف کنید :

$$x - y = x + (-y)$$

در اینصورت نشان دهیدکه • نسبت به - پخش است ، بعبارت دیگر نشان دهیـد که برای هر $x , y , z \in R$ داریم :

$$x(y-z)=(xy)-(xz)$$

و

$$(x-y)z=(xz)-(yz)$$

۶-۲-۳۴ : تعریف :

حلقه $(R \,؛+ ,\cdot)$ را یک‌حلقه یکانی می‌نامیم اگر R نسبت به عمل $\cdot$ دارای عنصر همانی باشد • در اینصورت عنصر همانی R نسبت به عمل $\cdot$ را با نماد ۱ نمایش می‌دهیم و آنرا عنصر واحد R می‌نامیم •

۶-۲-۳۵ : مثال :

(الف) $(\mathbb{Z} \,؛+ ,\cdot)$ یک حلقه یکانی است • زیراکه عدد ۱ عنصر واحد $\mathbb{Z}$ است •

(ب) $(\mathbb{Z}_n \,؛+ ,\cdot)$ یک حلقه یکانی است ، زیرا که $[1]$ عنصر واحد $\mathbb{Z}_n$ است •

(ج) $(\mathbb{R}^2 \,؛+ ,\cdot)$ یک حلقه یکانی است• زیرا که $(1,1)$ عنصر واحد $\mathbb{R}^2$ است •

۶-۲-۳۶ : تمرین : کدامیک از حلقه های زیر، حلقه یکانی است ؟

(الف) $(\mathbb{R} \,؛+ ,\cdot)$.

(ب) $({}^{A}\mathbb{R} \,؛+ ,\cdot)$.

(ج) $(\mathcal{P}(A) \,؛+ ,\cdot)$ در ۶-۲-۳۱(و) •

(د) $(E \,؛+ ,\cdot)$ در ۶-۲-۳۰ (د) •

۶-۲-۳۷ : قضیه :

فرض کنیم R یک مجموعه با بیش از یک عنصر و $(R \,؛+ ,\cdot)$ یک حلقه یکانی باشد • در اینصورت $1 \neq 0$ •

اثبات :

چون R بیش از یک عنصر دارد ، پس علاوه بر 0 عنصر دیگری مانند α در R

وجود دارد، بعبارت دیگر چون R بیش از یک عنصر دارد، پس $\alpha \in R$ وجود دارد بطوریکه $\alpha \neq \circ$. فرض کنیم $\circ = 1$ چون ۱ عنصر واحد R است، پس $\alpha 1 = \alpha$. بنا به ۶-۲-۳۲ (الف)، $\alpha \circ = \circ$. چون $1 = \circ$، پس $\alpha = \circ$ که یک تناقض است. بنابراین $1 \neq \circ$.

<u>۶-۲-۳۸ : تمرین :</u> فرض کنید $(R ; + , \cdot)$ یک حلقه یکانی باشد. نشان دهید که:

(الف) عنصر واحد R یکتاست.

(ب) برای هر $x \in R$ داریم:

$$(-1)x = x(-1) = -x$$

<u>۶-۲-۳۹ : تعریف :</u> حلقه $(R ; + , \cdot)$ یک حلقه جابجائی نامیده می شود، اگر عمل $\cdot$ جابجایی باشد.

<u>۶-۲-۴۰ : مثال :</u>

(الف) حلقه $(\mathbb{Z} ; + , \cdot)$ یک حلقه جابجایی است، زیرا که عمل $\cdot$ جابجایی است.

(ب) حلقه $(\mathbb{Z}_n ; + , \cdot)$ یک حلقه جابجایی است. زیرا که عمل $\cdot$ جابجایی است.

(ج) حلقه $(\mathbb{R}^2 ; + , \cdot)$ یک حلقه جابجایی است. زیرا که عمل $\cdot$ جابجایی است.

<u>۶-۲-۴۱ : تمرین :</u> نشان دهید که همه حلقه های ذکر شده در ۶-۲-۳۶ جابجایی هستند.

<u>۶-۲-۴۲ : تعریف :</u>

فرض کنیم $(R ; + , \cdot)$ یک حلقه و S یک زیر مجموعه R باشد، بطوریکه تحت اعمال $+$ و $\cdot$ بسته است. در اینصورت $(S ; + , \cdot)$ یک زیر حلقه $(R ; + , \cdot)$ است اگر $(S ; + , \cdot)$ یک حلقه باشد.

<u>۶-۲-۴۳ : مثال :</u>

(الف) $(E ; + , \cdot)$ یک زیر حلقه، حلقه $(\mathbb{Z} ; + , \cdot)$ است.

(ب) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ یک زیر حلقه، حلقه $(\mathbb{R},+,\cdot)$ است.

(ج) اگر $S=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$، آنگاه $(S,+,\cdot)$ یک زیر حلقه، حلقه $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ است.

(د) فرض کنیم $(R,+,\cdot)$ یک حلقه باشد. در اینصورت $(R,+,\cdot)$ یک زیرحلقه خودش است.

همچنین $(\{0\},+,\cdot)$ یک زیر حلقه $(R,+,\cdot)$ است. به این دو زیر حلقه، زیر حلقه های بدیهی $(R,+,\cdot)$ می‌گوئیم. اگر حلقه ای به غیر از زیرحلقه های بدیهی، زیر حلقه دیگری داشته باشد، به آن زیر حلقه یک زیرحلقه غیر بدیهی می‌گوئیم. مثلاً $(E,+,\cdot)$ یک زیر حلقه غیر بدیهی $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ است.

۶-۲-۴۴: تمرین:

فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک‌حلقه و $(S,+,\cdot)$ یک زیر حلقه $(R,+,\cdot)$ باشد نشان دهیدکه:

(الف) اگر $(R,+,\cdot)$ جابجایی باشد، آنگاه $(S,+,\cdot)$ نیز جابجایی است.

(ب) در حالت عمومی اگر $(R,+,\cdot)$ یکانی‌باشد، آنگاه $(S,+,\cdot)$ لزوماً یکانی نیست.

(ج) اگر $(R,+,\cdot)$ و $(S,+,\cdot)$ هردو یکانی باشند، آنگاه لزوماً عنصرواحد S مساوی‌عنصر واحد R نیست.

۶-۲-۴۵: تعریف:

فرض کنیم + و · دو عمل دوتایی روی مجموعه F باشند. در اینصورت ساختمان جبری $(F,+,\cdot)$ یک هیات نامیده می‌شوداگر داشته باشیم:

(الف) $(F,+)$ یک گروه آبلی باشد،

(ب) $(F-\{0\},\cdot)$ یک گروه آبلی باشد،

(ج) عمل · نسبت به عمل + پخشش باشد.

٤٦-۲-٦ : مثال :

(الف) $(\mathbb{Q}$ ؛ + و .$)$ یك هیات است ؛ زیرا که $(\mathbb{Q}$ ؛ +$)$ و $(\mathbb{Q}-\{0\}$ ؛ .$)$ گروههای آبلی هستند و عمل . نسبت به عمل + پخش است .

(ب) $(\mathbb{R}$ ؛ + و .$)$ یك هیات است . زیرا که $(\mathbb{R}$ ؛ +$)$ و $(\mathbb{R}-\{0\}$ ؛ .$)$ گروههای آبلی هستند و عمل . نسبت به عمل + پخش است .

(ج) زیر مجموعه $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{x+y\sqrt{2} \mid x , y \in \mathbb{Q}\}$ از $\mathbb{R}$ در ۹-۲-٦ (ب) را در نظر می‌گیریم . بنا به ۹-۲-٦ (ب) ، این زیر مجموعه تحت اعمال + و . بسته است . نشان می‌دهیم $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ؛ + و .$)$ یك هیات است . بنا به ۸-۲-٦ (الف) و (ب) ، اعمال + و . روی $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ شرکت‌پذیر و جابجایی هستند . $0=0+0\sqrt{2}$ عنصر صفر $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ؛ +$)$ و $1=1+0\sqrt{2}$ عنصر واحد $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})-\{0\}$ ؛ .$)$ می‌باشند . اگر $x+y\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، آنگاه $-(x+y\sqrt{2})=(-x)+(-y)\sqrt{2}$ در $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ است و در نتیجه هر عنصر در $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ نسبت به عمل + دارای معکوس است . حال فرض کنیم $x+y\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})-\{0\}$. در اینصورت $x\neq 0$ یا $y\neq 0$ و در نتیجه $x^2-2y^2\neq 0$ ، زیرا که $\sqrt{2}$ یك عدد اصم است . عنصر $\frac{x}{x^2-2y^2}+\frac{-y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$ که در $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ قرار دارد ، معکوس $x+y\sqrt{2}$ نسبت به عمل ضرب است . بنابراین $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ؛ +$)$ و $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})-\{0\}$ ؛ .$)$ گروههای آبلی هستند . چون . نسبت + روی $\mathbb{R}$ پخش است ، پس . نسبت به + روی $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ پخش است . بنابراین $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ؛ + و .$)$ یك هیات می‌باشد .

(د) $(\mathbb{Z}_2$ ؛ + و .$)$ یك هیات است . زیراکه $(\mathbb{Z}_2$ ؛ +$)$ و $(\mathbb{Z}_2-\{[0]\}$ ؛ .$)$ گروههای آبلی هستند و عمل . نسبت به عمل + پخش است .

٤٧-۲-٦ : تمرین : نشان دهید که :

(الف) یك هیات یك حلقه یکانی و جابجایی است .

(ب) در حالت عمومی یك حلقه یکانی و جابجایی لزوماً یك هیات نیست .

۶-۲-۴۸ : تعریف :

فرض کنیم $(F;+,\cdot)$ یك هیات و E یك زیر مجموعه F باشد بطوریکه تحت اعمال + و • بسته است • در اینصورت $(E;+,\cdot)$ یك زیر هیات $(F;+,\cdot)$ است اگر $(E;+,\cdot)$ یك هیات باشد •

۶-۲-۴۸ : مثال :

(الف) $(\mathbb{Q};+,\cdot)$ یك زیر هیات ، هیات $(\mathbb{R};+,\cdot)$ است•

(ب) $(\mathbb{Q};+,\cdot)$ یك زیر هیات ، هیات $(\mathbb{Q}(\sqrt{2});+,\cdot)$ است •

(ج) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2});+,\cdot)$ یك زیر هیات ، هیات $(\mathbb{R};+,\cdot)$ است•

۶-۲-۴۹ : تمرین :

فرض کنید $(F;+,\cdot)$ یك هیات باشد • نشان دهیدکه برای هر $x,y\in F$ داریم :

$$xy=0 \Longrightarrow x=0 \vee y=0$$

حال میخواهیم یك رابطه ترتیبی روی یك هیات یا بطور کلی تر روی یك حلقه یکانی و جابجایی تعریف کنیم • برای اینکار ابتدا حلقه یکانی و جابجایی مرتب و هیات مرتب را معرفی می‌کنیم •

۶-۲-۵۰ : تعریف :

حلقه یکانی و جابجایی $(R;+,\cdot)$ یك حلقه یکانی وجابجایی مرتب نامیده می‌شود اگر یك زیر مجموعه R^+ از R وجود داشته باشد بطوریکه :

(الف) برای هر $a,b\in R^+$ داشته باشیم $a+b, ab\in R^+$ ؛

(ب) برای هر $a\in R$ دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار باشد :

$$a=0 \vee a\in R^+ \vee -a\in R^+ \cdot$$

تذکر :

فرض کنیم $(F;+,\cdot)$ یك هیات باشد • بنابه ۶-۲-۴۷ (الف)، $(F;+,\cdot)$

یک حلقه یکانی و جابجایی است• حال می‌گوئیم $(F ; + , \cdot)$ یک هیات مرتب است ، اگر $(F ; + , \cdot)$ یک‌حلقه یکانی و جابجایی‌مرتب باشد ؛ بعبارت زیر مجموعه F^+ از F وجود داشته باشدبطوریکه شرایط (الف) و (ب) در ۶-۲-۵۰ در مورد F^+ و عناصر F برقرار باشند •

<u>۶-۲-۵۱ : مثال :</u>

(الف) $(\mathbb{Z} ; + , \cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی مرتب است ، زیرا که کافیست فرض کنیم :

$$\mathbb{Z}^+ = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z} \wedge \alpha > 0\}$$

(ب) $(\mathbb{R} ; + , \cdot)$ یک هیات مرتب است ، زیرا که کافیست فرض‌کنیم :

$$\mathbb{R}^+ = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0\}$$

(ج) حلقه یکانی‌و جابجایی $(\mathbb{Z}_n ; + , \cdot)$ را در نظر می‌گیریم • نشان می‌دهیم که $(\mathbb{Z}_n ; + , \cdot)$ یک حلقه یکانی‌و جابجایی مرتب نیست• فرض کنیم که باشد • در اینصورت زیر مجموعه $\mathbb{Z}_n^+$ از $\mathbb{Z}_n$ وجود دارد بطوریکه در شرایط (الف) و (ب) ۶-۲-۵۰ صدق می‌کند • چون $[0] \neq [1]$، پس بنا به ۶-۲-۵۰ (ب) ، دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است :

$$[1] \in \mathbb{Z}_n^+ \vee -[1] \in \mathbb{Z}_n^+$$

اگر $-[1] \in \mathbb{Z}_n^+$، آنگاه بنابه ۶-۲-۵۰ (ب) ، $(-[1])(-[1]) \in \mathbb{Z}_n^+$ •بنا

به ۶-۲-۳۲ (ج) ، $(-[1])(-[1]) = [1]$ و درنتیجه $[1] \in \mathbb{Z}_n^+$ • پس‌درهر

حالت $[1] \in \mathbb{Z}_n^+$ • حال بنابه ۶-۲-۵۰ (الف) ، $[2] = [1] + [1] \in \mathbb{Z}_n^+$ ؛

$[3] = [2] + [1] \in \mathbb{Z}_n^+$ و بااستفاده این بحث یا بااستفاده ازاستقرا

نتیجه می‌شود که $[n-1] \in \mathbb{Z}_n^+$ • ولی در $\mathbb{Z}_n$ داریم $[n-1] = -[1]$ ودرنتیجه

خواهیم داشت $[1] \in \mathbb{Z}_n^+$ و $-[1] \in \mathbb{Z}_n^+$ که یك تناقض است• پس $(\mathbb{Z}_n ; +,\cdot)$ یك حلقه یکانی و جابجایی مرتب نیست•

۶-۲-۵۲ : تعریف :

فرض کنیم $(R ; +,\cdot)$ یك حلقه یکانی و جابجایی مرتب باشد • رابطه $<$ را روی R بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$a < b \Longleftrightarrow b - a \in R^+$$

۶-۲-۵۳ : قضیه : رابطه تعریف‌شده روی R در ۶-۲-۵۲ یك رابطه ترتیبی خطی اکیداست •

اثبات :

فرض کنیم $a, b, c \in R$ بطوریکه $a < b$ و $b < c$ • در اینصورت $b - a \in R^+$ و $c - b \in R^+$.

بنا به ۶-۲-۵۰ (الف) ، $(c-b) + (b-a) \in R^+$• ولی در حلقه $(R ; +,\cdot)$ داریم:

بنا به ۶-۲-۳۳ : $(c-b) + (b-a) = (c + (-b)) + (b + (-a))$

بنابه شرکت‌پذیر بودن + : $= c + ((-b) + b) + (-a)$

بنا به تساوی $(-b) + b = 0$: $= c + 0 + (-a)$

بنا به خاصیت 0 : $= c + (-a)$

بنا به ۶-۲-۳۳ : $= c - a$

پس $c - a \in R^+$ و درنتیجه $a < c$ • بنابراین $<$ انتقالی است• حال فرض‌کنیم $a, b \in R$ • در اینصورت $a - b = 0$ یا $a - b \neq 0$• اگر $a - b = 0$ ، آنگاه $a = b$ • فرض کنیم $a - b \neq 0$• در اینصورت بنابه ۶-۲-۵۰ (ب) ،

$a-b\in R^+$ یا $-(a-b)\in R^+$ ٠ چون $-(a-b)=b-a$ ، پس

$a-b\in R^+$ یا $b-a\in R^+$ و در نتیجه $b<a$ یا $a<b$ ٠ پس $<$ یک رابطه ترتیبی خطی اکید روی R است ٠

تذکر:

فرض کنیم $(R;+,\cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی مرتب باشد ٠ بنابه ۵۲-۲-۶ رابطه تعریف‌شده در ۵۲-۲-۶ یک‌رابطه ترتیبی خطی اکید روی R است ٠ حال اگر I رابطه همانی روی R باشد و $\leqslant = < \cup I$، آنگاه بنابه ۳۵-۳-۴ (ج) ، $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی خطی روی R است٠ در واقع رابطه $\leqslant$ روی R بصورت زیر قابل تعریف است :

$$a\leqslant b\Longleftrightarrow a=b\vee a<b$$

همچنین روابط $>$ و $\geqslant$ را روی R می‌توان بصورت زیر تعریف کرد :

$$a>b\Longleftrightarrow b<a$$

و

$$a\geqslant b\Longleftrightarrow b\leqslant a$$

۵۳-۲-۶ : تمرین :

فرض کنید $(R;+,\cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی مرتب باشد ٠ نشان دهید که:

(الف) برای هر $a\in R$ داریم:

$$a\in R^+\Longleftrightarrow a>0\ .$$

(ب) $1>0$ ٠

(ج) برای هر $a\in R$، $a^2+1>0$ ٠

(د) برای هر $a\in R$، داریم :

$$a\geqslant 0\Longleftrightarrow -a\leqslant 0$$

(هـ) برای هر $a,b\in R$، داریم :

$$a > 0 \wedge b > 0 \Longrightarrow ab > 0$$

و

$$a < 0 \wedge b < 0 \Longrightarrow ab > 0$$

و

$$a > 0 \wedge b < 0 \Longrightarrow ab < 0$$

و

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow -b \leqslant -a$$

(و) برای هر $a, b, c \in R$ ، داریم :

$$a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c$$

و

$$a \leqslant b \wedge c \geqslant 0 \Longrightarrow ac \leqslant bc$$

٦-٢-٥٤ : تمرین :

فرض کنید $(R ; + , \cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی مرتب باشد • تابع قدر مطلق روی R را که با نماد $|\ |$ نمایش داده می‌شود ، بصورت زیر تعریف کنید :

$$|\ | : R \longrightarrow R$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{اگر } a > 0 \\ 0 & \text{اگر } a = 0 \\ -a & \text{اگر } a < 0 \end{cases}$$

نشان دهید که :

(الف) برای هر $a \in R$ ، $|a| = |-a|$ ، $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

(ب) برای هر $a, b \in R$ ، $|ab| = |a||b|$.

(ج) برای هر $a, b \in R$ ، $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

(د) برای هر $a, b \in R$ ، $\big||x| - |y|\big| \leqslant |a+b|$

٦-٢-٥٥ : تمرین :

فرض کنید $(F ; + , \cdot)$ یک هیات مرتب باشد •نشان دهید که برای هر $a, b \in F$

داریم :

$$o < a \leqslant b \Longrightarrow o < b^{-1} \leqslant a^{-1}$$

۶-۲-۵۶ : تعریف :

هیات مرتب $(F ; +, .)$ یك هیات مرتب کامل نامیده می‌شود اگر هر زیر مجموعه غیر تهی از F که دارای کران بالا در F است ، دارای کوچکترین کران بالا باشد ؛ بعبارت دیگر اگر X یك زیر مجموعه غیر تهی از F باشد بطوریکه دارای کران بالا در F است ، آنگاه $\sup X$ در F وجود داشته باشد •

۶-۲-۵۷ : مثال :

(الف) هیات مرتب $(\mathbb{R} ; +, .)$ یك هیات مرتب کامل است • این مطلب را در فصل بعدی اثبات خواهیم کرد •

(ب) هیات مرتب $(\mathbb{Q} ; +, .)$ یك هیات مرتب کامل نیست • زیراکه مثلاً مجموعه ، $X=\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant o \wedge x^{2} \leqslant 2\}$ یك زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{Q}$ است ودارای کران بالا ست (مثلاً $\frac{3}{2}$ یك کران بالا برای X است) • ولی $\sup X$ در $\mathbb{Q}$ وجود ندارد • در واقع $\sup X=\sqrt{2}$ که در $\mathbb{R}$ قرار دارد •

۶-۲-۵۸ : قضیه :

فرض کنیم $(F ; +, .)$ یك هیات مرتب کامل باشد • در اینصورت هر زیر مجموعه غیر تهی از F که دارای کران پائین در F است، دارای بزرگترین کران پائین در F می‌باشد •

اثبات :

فرض کنیم X یك زیر مجموعه غیر تهی از F است بطوریکه دارای کران پائین در F است • نشان می‌دهیم که $\inf X$ در F وجود دارد • تعریف می‌کنیم :

$$-X = \{-x \mid x \in X\}$$

چون X دارای کران پائین است، پس $\alpha \in F$ وجود دارد بطوریکه $\alpha \leqslant x$ برای هر $x \in X$. در اینصورت بنا به ۶-۲-۵۳ (هـ)، $-x \leqslant -\alpha$ برای هر $x \in X$ و در نتیجه $-\alpha$ یك کران بالا برای مجموعه $-X$ است. چون $(F ; + , .)$ یك هیات مرتب کامل است، پس $sup(-X)$ در F وجود دارد. نشان می‌دهیم که

$inf X = -sup(-X)$ فرض کنیم $x \in X$ در اینصورت $-x \in -X$ ودر نتیجه $-x \leqslant sup(-X)$ و بنا به ۶-۲-۵۳ (هـ)، $x \geqslant -sup(-X)$. پس $-sup(-X)$ یك کران پائین برای X است. حال فرض کنیم $b \in F$ یك کران پائین X باشد، یعنی برای هر $x \in X$، داشته باشیم $b \leqslant x$. در اینصورت بنا به ۶-۲-۵۳ (هـ)، $-b \geqslant -x$ برای هر $x \in X$ و در نتیجه $-b$ یك کران بالا برای $-X$ است. بنابراین $sup(-X) \leqslant -b$ و بنا به ۶-۲-۵۳ (هـ)، $b \leqslant -sup(-X)$. بنابراین $-sup(-X)$ بزرگترین کران بالای X است و در نتیجه $infX = -sup(-X)$

از ۶-۲-۵۶ و ۶-۲-۵۸ نتیجه زیر را داریم :

۶-۲-۵۹ : نتیجه :

فرض کنیم $(F ; + , .)$ یك هیات مرتب کامل باشد. اگر X یك زیر مجموعه غیرتهی از F باشد بطوریکه در F دارای کران بالا و کران پائین است، آنگاه $sup X$ و $inf X$ در F وجود دارند.

۶-۳ : تمرین و یکریختی

یکی ازموارد مهم در مطالعه ساختمانهای جبری، مقایسه ساختمانهای جبری است، بدین صورت که ساختمان جبری مورد مطالعه را با یك ساختمان جبری شناخته شده مقایسه می‌کنیم و تحقیق می‌کنیم که ساختمان جبری مورد مطالعه کدامیك ازخواص ساختمان جبری شناخته شده رادارد. البته یکی از روشهای مقایسه دو ساختمان جبری روش تساوی است. بدین صورت که می‌گوییم دو ساختمان $(A ; *_1 , \ldots , *_n)$ و

$(B; *'_1, \dots, *'_n)$ باهم مساویند اگر $A = B$ و برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$، $*_i = *'_i$ • این روش مقایسه یك روش بدیهی استو از اهمیت چندانی برخوردار نیست • در این قسمت دو روش مقایسه دیگر برای ساختمانهای جبری بیان می‌کنیم که بسیار مهم می‌باشند •

۱-۳-٦ : تعریف :

فرض کنیم $(A; *_1, \dots, *_n)$ و $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ دوساختمان جبری باشند •

(الف) تابع $f : A \longrightarrow B$ یك همریختی از ساختمان $(A; *_1, \dots, *_n)$ به ساختمان $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ نامیده می‌شود اگر برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ و برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم :

$$f(x *_i y) = f(x) *'_i f(y)$$

بعلاوه اگر f یك تابع پوشا باشد ، آنگاه ساختمان جبری $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ تصویر همریخت ساختمان جبری $(A; *_1, \dots, *_n)$ نامیده می شود •

(ب) تابع $f : A \longrightarrow B$ یك یکریختی از ساختمان $(A; *_1, \dots, *_n)$ به ساختمان $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ نامیده می‌شود اگر f یك تابع دوسویی و یك همریختی باشد • اگر یك یکریختی از $(A; *_1, \dots, *_n)$ به $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ وجود داشته باشد ، آنگاه می‌گوییم $(A; *_1, \dots, *_n)$ با $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ یکریخت است و می‌نویسیم $(A; *_1, \dots, *_n) \cong (B; *'_1, \dots, *'_n)$ و یا بطور خلاصه می‌نویسیم $A \cong B$ •

تذکر :

(الف) از تعریف فوق روشن است که هر یکریختی یك همریختی است •

(ب) اگر ساختمان جبری $(A; *_1, \dots, *_n)$ با ساختمان جبری $(B; *'_1, \dots, *'_n)$ یکریخت باشد ، آنگاه می‌شود گفت که این دو ساختمان جبری یکسانند • بدین معنی که توسط یکریختی که از $(A; *_1, \dots, *_n)$ به $(B; *'_1, \dots, *'_n)$

وجود دارد می‌توان هر خاصیت ساختمان $(A; *_1, \ldots\ldots, *_n)$ را بـه $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ منتقل کرده و بالعکس • در واقع می‌شود گفت که ساختمان $(B; *'_1, \ldots\ldots, *'_n)$ همان ساختمان $(A; *_1, \ldots\ldots, *_n)$ است با این تفاوت که اسامی عناصر B و اسامی اعمال دوتایی روی B با اسامی عناصر A و اسامی اعمال دوتایی روی A یک سان نیستند •

۲-۳-٦ : قضیه :

فرض کنیم $(A; *_1, \ldots\ldots, *_n)$ ، $(B; *'_1, \ldots\ldots, *'_n)$ و $(C; *''_1, \ldots\ldots, *''_n)$ سه ساختمان جبری باشند • در اینصورت داریم :

(الف) $A \cong A$

(ب) $A \cong B \Longrightarrow B \cong A$

(ج) $A \cong B \wedge B \cong C \Longrightarrow A \cong C$

اثبات :

(الف) تابع همانی i_A روی A را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که یک یکریختی از $(A; *_1, \ldots\ldots, *_n)$ به $(A; *_1, \ldots\ldots, *_n)$ است بنابه ۲-۲-۳ (ج) ، تابع i_A دوسویی است و بعلاوه برای هر $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ و $x, y \in A$ داریم :

$$i_A(x *_i y) = x *_i y = i_A(x) *_i i_A(y)$$

پس i_A یک یکریختی است و در نتیجه $A \cong A$.

(ب) فرض کنیم $A \cong B$ در اینصورت یک یکریختی از $(A; *_1, \ldots, *_n)$ به $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ مانند f وجود دارد •چون $f: A \to B$ یک تابع دوسویی است ، پس بنا به ۲۰۲۰۳ و ۲۲۰۱۰۳ (الف) ، $f^{-1}: B \to A$ یک تابع دو سویی است •فرض کنیم $x', y' \in B$ •در اینصورت چون f پوشاست پس $x, y \in A$ وجود دارند بطوریکه $x' = f(x)$ و $y' = f(y)$ و در نتیجه $x = f^{-1}(x')$ و $y = f^{-1}(y')$ •حال برای هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ ، داریـم :

$$f(x *_i y) = f(x) *'_i f(y)$$
$$= x' *'_i y'$$

و در نتیجه :

$$f^{-1}(x' *'_i y') = x *_i y$$
$$= f^{-1}(x') *_i f^{-1}(y')$$

بنابراین f^{-1} یك یکریختی استو در نتیجه $B \cong A$.

(ج) فرض کنیم $A \cong B$ و $B \cong C$. در اینصورت یك یکریختی f از $(A; *_1, \ldots, *_n)$ به $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ و یك یکریختی g از $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ به $(C; *''_1, \ldots, *''_n)$ وجود دارند.

بنا به ۳-۲-٤، تابع $g \circ f$ یك تابع دوسویی از A به C است . بعلاوه برای هر $x, y \in A$ و $i \in \{1, \ldots, n\}$ داریم :

بنا به تذکر بعداز ۳-۱-۸ : $(g \circ f)(x *_i y) = g(f(x *_i y))$

بنابه یکریختی بودن f : $= g(f(x) *'_i f(y))$

بنابه یکریختی‌بودن g : $= g(f(x)) *''_i g(f(y))$

بنا به تذکر بعداز ۳-۱-۸ : $= (g \circ f)(x) *''_i (g \circ f)(y)$

پس $g \circ f$ یك یکریختی است و در نتیجه $A \cong C$.

<u>۳-۳-٦ : مثال :</u>

(الف) فرض کنیم

$$\mathbb{Z}^* = \{10^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

حال ساختمانهای جبری $(\mathbb{Z}; +)$ و $(\mathbb{Z}^*; \cdot)$ را در نظر می گیریم . نشان‌میدهیم که با هم یکریختند . تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$$
$$f(n) = 10^n$$

در اینصورت روشن است که f یک تابع دو سویی است و بعلاوه برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داریم :

$$f(m+n) = 10^{m+n}$$
$$= (10^{m})(10^{n})$$
$$= f(m)f(n)$$

پس f یک یکریختی است و در نتیجه $(\mathbb{Z}^{*}, \cdot) \cong (\mathbb{Z} ; +)$ ۰

(ب) ساختمانهای جبری $(\mathbb{N} ; +)$ و $(\mathbb{Z} ; +)$ را در نظر می‌گیریم ۰ تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(n) = n$$

در اینصورت f یک همریختی است ۰ زیرا که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم :

$$f(m+n) = m+n$$
$$= f(m) + f(n)$$

بنابراین f یک همریختی از $(\mathbb{N} ; +)$ به $(\mathbb{Z} ; +)$ است ۰

(ج) ساختمانهای جبری $(\mathbb{Z} ; + , \cdot)$ و $(\mathbb{Q} ; + , \cdot)$ را در نظر می‌گیریم ۰ تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$f(n) = n$$

در اینصورت f یک همریختی است ۰ زیرا که برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$، داریم :

$$f(m+n) = m+n$$
$$= f(m) + f(n)$$

و

$$f(mn) = mn$$
$$= f(m)f(n)$$

پس f یک همریختی از $(\mathbb{Z}\,;\,+\,,\,\cdot)$ به $(\mathbb{Q}\,;\,+\,,\,\cdot)$ است.

(د) ساختمانهای جبری $(\mathbb{Z}\,;\,+\,,\,\cdot)$ و $(\mathbb{Z}_n\,;\,+\,,\,\cdot)$ را در نظر می‌گیریم.
تعریف می‌کنیم :

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$

$f(x) =$ باقیمانده تقسیم x بر n

در اینصورت با استفاده از آلگوریتم تقسیم در $\mathbb{Z}$ که در ۸-۲-۱-۴ (د) درباره آن صحبت شد، می‌توان نتیجه گرفت که f یک همریختی است. همچنین f یک تابع پوشا ست. در اینجا از نوشتن اثبات این مطالب صرفنظر می‌کنیم. پس می‌توان نتیجه گرفت‌که $(\mathbb{Z}_n\,;\,+\,,\,\cdot)$ یک تصویر همریخت $(\mathbb{Z}\,;\,+\,,\,\cdot)$ است.

(هـ) فرض کنیم P_x مجموعه همه گزاره‌نما های یک متغیره با متغیر x و با مجموعه جهانی $\mho$ باشد. ساختمانهای $(P_x\,;\,\vee\,,\,\wedge)$ و $(\mathscr{P}(\mho)\,;\,\cup\,,\,\cap)$ را در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم :

$$f : P_x \longrightarrow \mathscr{P}(\mho)$$
$$f(p_x) = P$$

که در آن P مجموعه جواب p_x است. در اینصورت f یک همریختی است. زیرا که برای هر $p_x, q_x \in P_x$ با مجموعه های درستی P و Q داریم :

بنا به ۱-۲-۱۱ (الف) : $f(p_x \vee q_x) = P \cup Q$

بنا به تعریف f : $= f(p_x) \cup f(q_x)$

و

بنا به ۱-۲-۱۱ (ب) : $f(p_x \wedge q_x) = P \cap Q$

بنا به تعریف f : $= f(p_x) \cap f(q_x)$

پس f یک همریختی از $(P_x\,;\,\vee\,,\,\wedge)$ به $(P(\mho)\,;\,\cup\,,\,\cap)$ است.

۴-۳-۶ : تمرین :

(الف) فرض کنید $(G\,,\,\cdot)$ یک گروه آبلی باشد. نشان دهید که تابع f که بصورت

زیر تعریف می‌شود ، یك یکریختی از $(G ,\cdot)$ به خودش است •

$$f : G \longrightarrow G$$
$$f(x) = x^{-1}$$

(ب) فرض کنید $(R ,+ ,\cdot)$ یك حلقه باشد • نشان دهید که تابع f که بصورت زیر تعریف می‌شود ، یك همریختی از $(R ,+ ,\cdot)$ به خودش است •

$$f : R \longrightarrow R$$
$$f(x) = 0$$

(ج) ساختمانهای $(\mathbb{R} ,+ ,\cdot)$ و $(\mathbb{R}^2 ,+ ,\cdot)$ را در نظر بگیرید • تعریف کنید :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x) = (x , 0)$$

نشان دهید که f یك همریختی یك بیك از $(\mathbb{R} ,+ ,\cdot)$ به $(\mathbb{R}^2 ,+ ,\cdot)$ است •

۵-۳-۶ : قضیه :

ساختمانهای جبری $(A ,*)$ و $(B ,*')$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f : A \to B$: یك همریختی پوشا از $(A ,*)$ به $(B ,*')$ باشد ، بعبارت دیگر فرض می‌کنیم $(B ,*')$ تصویر همریخت $(A ,*)$ است • در اینصورت :

(الف) اگر $(A ,*)$ دارای عنصرهمانی باشد ، آنگاه $(B ,*')$ نیز دارای عنصرهمانی استو بعلاوه اگر e عنصر همانی $(A ,*)$ باشد ، آنگاه $f(e)$ عنصر همانی $(B ,*')$ است •

(ب) اگر $(A ,*)$ دارای عنصر همانی باشد و $a \in A$ دارای معکوس باشد ، آنگاه $f(a) \in B$ دارای معکوس است و بعلاوه اگر $a' \in A$ معکوس a باشد ، آنگاه $f(a') \in B$ معکوس $f(a)$ است •

(ج) اگر $*$ شرکت پذیر باشد ، آنگاه $*'$ شرکت پذیر است •

(د) اگر $*$ جابجایی باشد ، آنگاه $*'$ جابجایی است •

اثبات :

(الف) فرض کنیم $(A ; *)$ دارای عنصر همانی e است . نشان می‌دهیم که $(B ; *')$ دارای عنصر همانی $f(e)$ است . فرض کنیم $y \in B$ ، چون f پوشاست پس $x \in A$ وجود دارد بطوریکه $y = f(x)$. در اینصورت داریم :

بنا به تساوی $y=f(x)$: $f(e) *' y = f(e) *' f(x)$

بنا به همریختی بودن f : $= f(e * x)$

بنا به همانی بودن e : $= f(x)$

بنا به تساوی $y=f(x)$: $= y$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $y *' f(e) = y$ و در نتیجه $f(e)$ عنصر همانی $(B ; *')$ است .

(ب) فرض کنیم e عنصر همانی $(A ; *)$ است . پس بنا به بند (الف) ، $f(e)$ عنصر همانی $(B ; *')$ است . چون α' معکوس α است ، پس داریم :

$$\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e$$

و در نتیجه $f(\alpha * \alpha') = f(\alpha' * \alpha) = f(e)$

حال چون f یک همریختی است، پس داریم :

$$f(\alpha) *' f(\alpha') = f(\alpha') *' f(\alpha) = f(e)$$

بنابراین $f(\alpha')$ یک معکوس $f(\alpha)$ است .

(ج) فرض کنیم $x_1, y_1, z_1 \in B$. در اینصورت چون f پوشاست $x, y, z \in A$ وجود دارند بطوریکه $x_1 = f(x)$ ، $y_1 = f(y)$ و $z_1 \in f(z)$. بنابراین داریم :

بنا به تساویهای فوق : $(x_1 *' y_1) *' z_1 = (f(x) *' f(y)) *' f(z)$

بنا به همریختی بودن f : $= f(x * y) *' f(z)$

بنا به همریختی بودن f : $= f((x * y) * z)$

بنا به شرکت‌پذیر بودن $*$: $= f(x * (y * z))$

بنا به همریختی بودن f : $= f(x) *' f(y * z)$

بنا به همریختی بودن f : $=f(x)*'(f(y)*'f(z))$

بنا به تساویهای فوق : $=x_1*'(y_1*'z_1)$

پس $*'$ شرکت پذیر است •

(د) توسط اثباتی مشابه اثبات بند (ج) ، می‌توان از جابجایی بودن $*$ ، جابجایی بودن $*'$ را نتیجه گرفت • بعنوان تمرین اثبات این بند را بنویسید •

<u>۶-۳-۶ : تمرین :</u>

(الف) فرض کنید f یك همریختی از ساختمان جبری $(A ; *)$ به ساختمان جبری $(B ; *')$ باشد • نشان دهید که زیر مجموعه $ran\, f = f[A]$ از B تحت عمل $*'$ بسته است •

(ب) فرض کنید f یك همریختی از گروه $(G ; *)$ به گروه $(G' ; *')$ باشد • نشان دهید که $(f[G] ; *')$ یك زیر گروه $(G' ; *')$ است •

(ج) فرض کنید f یك همریختی از حلقه $(R ; + , \cdot)$ به حلقه $(R' ; + , \cdot)$ باشد نشان دهید که $(f[R] ; + , \cdot)$ یك زیر حلقه $(R' ; + , \cdot)$ است •

(د) فرض کنید f یك همریختی از هیات $(F ; + , \cdot)$ به هیات $(F' ; + , \cdot)$ باشد • نشان دهید که $(f[F] ; + , \cdot)$ یك زیر هیات $(F' ; + , \cdot)$ است •

(هـ) نشان دهید که گروههای $(S_3 ; \circ)$ و $(\mathbb{Z}_6 ; +)$ نمی‌توانند یکریخت باشند •

<u>۶-۳-۷ : تعریف :</u> ساختمانهای جبری $(A ; *_1 , \ldots , *_n)$ و $(B ; *'_1 , \ldots , *'_n)$ را در نظر می‌گیریم • می‌گوئیم $(A ; *_1 , \ldots , *_n)$ در $(B ; *'_1 , \ldots , *'_n)$ محاط می‌شود اگر یك همریختی یك بیك از $(A ; *_1 , \ldots , *_n)$ به $(B ; *'_1 , \ldots , *'_n)$ وجود داشته باشد •

<u>تذکر :</u>

فرض کنیم که ساختمان جبری $(A ; *_1 , \ldots , *_n)$ در ساختمان جبری $(B ; *'_1 , \ldots , *'_n)$

محاط می‌شود • در اینصورت تابع یک بیک $f: A \longrightarrow B$ وجود دارد بطوریکه f یک همریختی است • بنا به ۶-۳-۶ (الف)، $(f[A]; *'_1, \ldots, *'_n)$ یک زیر ساختمان جبری $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ است • چون تابع f از A به $f[A]$ پوشاست و بنا به فرض یک همریختی یک بیک است، پس f یک یکریختی از $(A; *_1, \ldots, *_n)$ به $(f[A]; *'_1, \ldots, *'_n)$ می باشد و در نتیجه $A \cong f[A]$ • پس نتیجه می‌شود که ساختمان جبری $(A; *_1, \ldots, *_n)$ در ساختمان جبری $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ محاط می‌شود اگر و فقط اگر $(A; *_1, \ldots, *_n)$ با یک زیر ساختمان جبری $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ یکریخت باشد •

<u>۶-۳-۸ : مثال :</u>

(الف) ساختمان جبری $(\mathbb{N}; +)$ در ساختمان جبری $(\mathbb{Z}; +)$ توسط همریختی یک بیک $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ بطوریکه $f(n) = n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، محاط می‌شود •

(ب) ساختمان جبری $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ در ساختمان جبری $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ توسط همریختی یک بیک $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ بطوریکه $f(q) = q$ برای هر $q \in \mathbb{Q}$ محاط می‌شود •

(ج) ساختمان جبری $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ در ساختمان جبری $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ توسط همریختی یک بیک f که بصورت زیر تعریف می‌شود ، محاط می‌گردد •

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x) = (x, 0)$$

بنا به تذکر بعد از ۶-۳-۷، $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ با $(f[\mathbb{R}]; +, \cdot)$ یکریخت است • در اینجا توجه می‌کنیم که :

$$f[\mathbb{R}] = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(د) ساختمان جبری $(A; *_1, \ldots, *_n)$ در خودش توسط تابع همانی روی A که یک همریختی یک بیک است ، محاط می‌شود • بنابراین هر ساختمان جبری در خودش محاط می‌شود •

<u>۶-۳-۹ : تمرین :</u> در هریک از بند های زیر دو ساختمان جبری داده شده اند • تعیین

کنید که آیا می‌توان یکی را در دیگری محاط کرد •

(الف) $(\mathbb{N};+,\cdot)$ و $(\mathbb{R};+,\cdot)$ •

(ب) $(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$ و $(\mathbb{R}^3;+,\cdot)$ •

(ج) $(S_3;\circ)$ و $(\mathbb{Z}_6;+)$ •

(د) $(S_3;\circ)$ و $(D_4;\circ)$ •

(هـ) $(\mathbb{Z};+,\cdot)$ و $(\mathbb{Z}_n;+,\cdot)$

۱۰-۳-٦ : تمرین :

نشان دهید که اگر ساختمان جبری $(A;*_1,\dots,*_n)$ در ساختمان جبری $(B;*'_1,\dots,*'_n)$ و ساختمان جبری $(B;*'_1,\dots,*'_n)$ در ساختمان جبری $(C;*''_1,\dots,*''_n)$ محاط شوند، آنگاه $(A;*_1,\dots,*_n)$ در $(C;*''_1,\dots,*''_n)$ محاط می‌شود •

۱۱-۳-٦ : تمرین :

حلقه یکانی و جابجایی $(R;+,\cdot)$ یک دامنه صحیح نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y\in R$ داشته باشیم :

$$xy=0 \Longrightarrow x=0 \vee y=0$$

مثلاً $(\mathbb{Z};+,\cdot)$ یک دامنه صحیح است •

(الف) آیا $(\mathbb{Z}_4;+,\cdot)$ یک دامنه صحیح است؟

(ب) آیا $(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$ یک دامنه صحیح است ؟

(ج) نشان دهید که هر هیات یک دامنه صحیح است •

(د) فرض کنید $(R;+,\cdot)$ و $(R';+,\cdot)$ دو حلقه یکریخت باشند • نشان دهید که اگر $(R;+,\cdot)$ یک دامنه صحیح باشد، آنگاه $(R';+,\cdot)$ نیز یک دامنه صحیح است •

تذکـــر:

در ۳۹-۲-۶، تعریف کردیم که حلقه $(R ; +, \cdot)$ جابجایی است اگر عمـــل • جابجایی باشد و مثالهایی را که تاکنون برای حلقه ارائه کرده ایم ، جابجایی بوده اند. حال با استفاده از همریختی ها مثالی از یک حلقه غیر جابجایی ارائه می کنیم •

۱۲-۳-۶ : مثال :

گروه آبلی $(\mathbb{R}^2 ; +)$ را در نظر می گیریم • فرض کنیم $E(\mathbb{R}^2)$ مجموعه همه همریختی ها از $(\mathbb{R}^2 ; +)$ بخود ش باشد • روی $E(\mathbb{R}^2)$ دو عمل + و • را بصـــورت زیر تعریف می کنیم •

$$f+g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$$

و

$$fg : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(fg)(x,y)=f\big(g(x,y)\big)$$

در واقع عمل ضرب تعریف شده در اینجا همان عمل ترکیب توابع است • البته باید نشـــان داد که $f+g$ و fg در $E(\mathbb{R}^2)$ قرار دارند • یعنی باید نشان داد که $f+g$ و fg دو همریختی از $(\mathbb{R}^2 ; +)$ بخود ش هستند • در زیر نشان می دهیم که $f+g$ یـــک همریختی است •

$(f+g)\big((x,y)+(x',y')\big)=(f+g)(x+x',y+y')$: بنا به تعریف + روی $\mathbb{R}^2$

$=f(x+x',y+y')+g(x+x',y+y')$: بنا به تعریف + روی $E(\mathbb{R}^2)$

$=f\big((x,y)+(x',y')\big)+g\big((x,y)+(x',y')\big)$: بنا به تعریف + روی $\mathbb{R}^2$

$=\big(f(x,y)+f(x',y')\big)+\big(g(x,y)+g(x',y')\big)$: بنا به همریختی بودن f و g

$=\big(f(x,y)+g(x,y)\big)+\big(f(x',y')+g(x',y')\big)$: بنا به شرکت پذیر و جابجائی بودن + روی $\mathbb{R}^2$

$=(f+g)(x,y)+(f+g)(x',y')$: بنا به تعریف + روی $E(\mathbb{R}^2)$

پس $f+g\in E(\mathbb{R}^2)$ با اثباتی مشابه اثباتی که در ۲-۳-۶ (ج) ارائه شد، می‌توان نشان داد که $fg\in E(\mathbb{R}^2)$. در اینصورت $(E(\mathbb{R}^2); +, \cdot)$ یک حلقه است. این مطلب را بعنوان تمرین نشان دهید. حال اگر تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ و تابع $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ بصورت زیر تعریف کنیم، آنگاه f و g در $E(\mathbb{R}^2)$ قرار دارند.

$$f(x,y)=(x+y,0)$$

و

$$g(x,y)=(0,y)$$

زیرا که داریم :

$$\begin{aligned} f\big((x,y)+(x',y')\big) &= f(x+x',y+y') \\ &= (x+x'+y+y',0) \\ &= (x+y,0)+(x'+y',0) \\ &= f(x,y)+f(x',y') \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g\big((x,y)+(x',y')\big) &= g(x+x',y+y') \\ &= (0,y+y') \\ &= (0,y)+(0,y') \\ &= g(x,y)+g(x',y') \end{aligned}$$

پس $f,g\in E(\mathbb{R}^2)$ بعلاوه $fg\neq gf$. زیرا که مثلاً برای $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ داریم :

$$(fg)(0,1)=f\big(g(0,1)\big)=f(0,1)=(1,0)$$

و

$$(gf)(0,1)=g\big(f(0,1)\big)=g(1,0)=(0,0)$$

پس $fg\neq gf$ ودر نتیجه حلقه $(E(\mathbb{R}^2):+,\cdot)$ جابجایی نیست.

۱۳-۳-۶ : تعریف :

فرض کنیم $(A;*_1,\ldots,*_n)$ و $(B;*'_1,\ldots,*'_n)$ دوساختمان جبری و $\leqslant$ و $\leqslant'$ بترتیب دو رابطه ترتیبی روی A و B باشند •

(الف) تابع $f:A\rightarrow B$ یك همریختی از ساختمان جبری $(A;*_1,\ldots,*_n)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ به ساختمان جبری $(B;*'_1,\ldots,*'_n)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant'$ است ، اگر f یك همریختی از ساختمان جبری $(A;*_1,\ldots,*_n)$ به ساختمان جبری $(B;*'_1,\ldots,*'_n)$ باشد و بعلاوه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم :

$$x\leqslant y\Longrightarrow f(x)\leqslant' f(y)$$

(ب) تابع $f:A\longrightarrow B$ یك یکریختی از ساختمان جبری $(A;*_1,\ldots,*_n)$ بارابطه ترتیبی $\leqslant$ به ساختمان جبری $(B;*'_1,\ldots,*'_n)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant'$ است ، اگر f یك همریختی از ساختمان جبری $(A;*_1,\ldots,*_n)$ بارابطه ترتیبی $\leqslant$ به ساختمان جبری $(B;*'_1,\ldots,*'_n)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant'$ وبعلاوه f یك تابع دوسویی باشد •

۱۴-۳-۶ : مثال :

(الف) یکریختی f در ۳-۳-۶ (الف) را در نظر می‌گیریم • اگر رابطه ترتیبی کوچکتر یا مساوی بودن اعداد را روی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^*$ در نظربگیریم ، آنگاه برای هر $m,n\in\mathbb{Z}$ داریم :

$$m\leqslant n\Longrightarrow 10^m\leqslant 10^n\Longrightarrow f(m)\leqslant f(n)$$

پس f یك یکریختی از $(\mathbb{Z};+)$ با رابطه $\leqslant$ به $(\mathbb{Z}^*;\cdot)$ با رابطه $\leqslant$ است •

(ب) روشن است که همریختی f در ۳-۳-۶ (ب) ، یك همریختی از $(\mathbb{N};+)$ با $\leqslant$ به $(\mathbb{Z};+)$ با $\leqslant$ است •

(ج) ساختمانهای $(\mathbb{R};+,\cdot)$ و $(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$ را در نظر می‌گیریم • رابطه کوچکتر یا مساوی بودن اعداد ، $\leqslant$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم • حال رابطه $\leqslant'$

را روی $\mathbb{R}^2$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x, y) \leqslant' (x', y') \Longleftrightarrow x \leqslant x' \wedge y \leqslant y' .$$

در اینصورت مانند ۲-۳-۴ ۱ (الف) ، می‌توان نشان داد که $\leqslant'$ یک رابطه ترتیبی جزیی روی $\mathbb{R}^2$ است . حال تابع f در ٤-۳-٦ (ج) ، یک همریختی از $(\mathbb{R}, +)$ با $\leqslant$ به $(\mathbb{R}^2, +)$ با $\leqslant'$ است . زیرا که برای هر $x, y \in R$ داریم :

$$x \leqslant y \Longrightarrow (x, 0) \leqslant' (y, 0) \Longrightarrow f(x) \leqslant' f(y) .$$

(د) ساختمان $(\mathbb{Z}, +)$ را در نظر می‌گیریم . بنابه ٤-۳-٦ (الف) ، تابع $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بطوریکه $f(x) = -x$ ، برای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، یک یکریختی از $(\mathbb{Z}, +)$ به خودش است . حال اگر رابطه معمولی $\leqslant$ را روی $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم آنگاه f یک یکریختی از $(\mathbb{Z}, +)$ با $\leqslant$ به خودش نیست . زیرا که مثلاً برای $1, 2 \in \mathbb{Z}$ ، گزاره زیر غلط است :

$$1 \leqslant 2 \Longrightarrow f(1) \leqslant f(2)$$

چون $1 \leqslant 2$ درست و $f(1) \leqslant f(2)$ غلط است . در اینجا $f(1) = -1$ و $f(2) = -2$.

<u>۶-۳-۱۵ : تمرین :</u>

مجموعه های A و B و تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید . تعریف کنید :

$$g : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$$
$$g(X) = f[X]$$

(الف) نشان دهید که g یک همریختی از ساختمان جبری $(\mathcal{P}(A), \cup)$ با رابطه ترتیبی $\subseteq$ به ساختمان جبری $(\mathcal{P}(B), \cup)$ با رابطه ترتیبی $\subseteq$ است .

(ب) تحت چه شرایطی g یک یکریختی است؟

فصل ۷

ساختمان اعداد

تابحال در فصل های پیش از ساختمانهای مختلف اعداد و خواص آنها بطوری آزادانه استفاده کرده ایم • در این فصل با فرض وجود اعداد طبیعی سایردستگاهها اعداد را میسازیم • بدین صورت که با استفاده ازاعدادطبیعی , اعداد صحیح وسپس با استفاده ازاعداد صحیح اعداد گویا را میسازیم • همچنین درقسمت آخر این فصل با استفاده ازاعداد گویا اعداد حقیقی را خواهیم ساخت • در این فصل ملاحظه خواهیم کرد که با استفاده ازتعداد کمی اصول میتوان همه خواص دستگاههای اعداد رابدست آورد •

۷-۱ : اعدادطبیعی

دستگاه اعداد طبیعی ۱, ۲, ۳, ••• نقطه شروع برای ساختن سایردستگاههای اعدادمیباشد • برای بیان دستگاه اعداد طبیعی پآنو ریاضیدان ایتالیایی در اواخر قرن نوزدهم اصولی را ارائه نمودکه بدنبال نام او به اصول پآنو معروفند • در این قسمت ملاحظه خواهیم کردکه باداشتن این اصول میتوان همه خواص دستگاه اعدادطبیعی را که تابحال بطورآزادانه ازآنها استفاده کرده ایم , بدست بیاوریم •

اصول پآنو:

فرض کنیم یک مجموعه N و یک تابع s روی N وجود دارند بطوریکه :

(الف) s پوشانیست , بعبارت دیگر عنصر $1 \in N$ وجود داردبطوریکه $s(n) \neq 1$ برای هر $n \in N$ •

(ب) s یک بیک است ، بعبارت دیگر برای هر $m,n\in \mathbb{N}$ ، اگر $s(m)=s(n)$ ، آنگاه $m=n$.

(ج) اگر $S\subseteq \mathbb{N}$ بطوریکه $1\in S$ و برای هر $n\in \mathbb{N}$ ، $n\in S$ نتیجه بدهد که $s(n)\in S$ ، آنگاه $S=\mathbb{N}$.

بعداً خواهیم دید که اصل (ج) ، همان استقرا ریاضی است که قبلاً در فصل ۱ در مورد آن صحبت کردیم .

__۱-۱-۷ : قضیه :__

اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n\neq 1$ ، آنگاه عنصر یکتای $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n=s(m)$.

__اثبات :__ تعریف می‌کنیم :

$$S=\{n \mid n\in\mathbb{N}\wedge (n=1 \vee n=s(m) \text{ برای یک } m\in\mathbb{N})\}$$

در اینصورت بنا به تعریف S ، $1\in S$. فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و $n\in S$. در اینصورت $n=1$ یا $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n=s(m)$. اگر $n=1$ ، آنگاه $s(n)=s(1)$ و چون $1\in\mathbb{N}$ ، پس $s(n)\in S$. اگر $n=s(m)$ ، آنگاه $s(n)=s(s(m))$ و چون $s(m)\in\mathbb{N}$ ، پس $s(n)\in S$. بنابراین در هر حالت $s(n)\in S$. حال بنا به اصل (ج) از اصول پآنو، $S=\mathbb{N}$. بنابراین برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، اگر $n\neq 1$: آنگاه عنصر $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n=s(m)$. حال برای اثبات یکتایی m ، فرض کنیم $m'\in\mathbb{N}$ نیز وجود دارد بطوریکه $n=s(m')$. در اینصورت $s(m)=s(m')$ و بنا به اصل (ب) از اصول پآنو، $m=m'$. پس m یکتاست .

__تذکر :__

(الف) از قضیه فوق نتیجه می‌شود که ۱ تنها عنصر $\mathbb{N}$ است که دربرد تابع s قرار ندارد . بعبارت دیگر $\operatorname{ran} s=\mathbb{N}-\{1\}$.

(ب) با استفاده از تعریف بازگشتی که در تذکر بعد از ۱۲-۱-۲ در مورد آن صحبت

کردیم ، اعمال جمع و ضرب روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر می‌شوند •

۲-۱-۷ : تعریف : برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، تعریف می‌کنیم :

(الف) $m+1 = s(m)$ و $m+s(n) = s(m+n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ •

(ب) $m1 = m$ و $ms(n) = mn + m$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ •

همانطوریکه ملاحظه می‌شود ، تعریف فوق یک تعریف بازگشتی است• بدین صورت که مثلاً برای جمع ، ابتدا $m+1$ را تعریف می‌کنیم و سپس $m+s(1)$ را تعریف می‌کنیم مساوی $s(m+1)$ باشد و بهمین صورت ادامه می‌دهیم •

تذکر :

بنا به ۲-۱-۷، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم $s(n) = n+1$ • پس اصل (ج) در اصول پآنو را می‌توان بصورت زیر بیان کرد :

" اگر $S \subseteq \mathbb{N}$ بطوریکه $1 \in S$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n \in S$ نتیجه بدهد $n+1 \in S$ ، آنگاه $S = \mathbb{N}$ " •

این جمله همان استقرا ریاضی است که قبلاً در فصل ۱ در مورد آن صحبت شد • بدین صورت که فرض کنیم میخواهیم خاصیت P_n را برای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنیم • برای اینکار مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم :

$$S = \{ n \mid n \in \mathbb{N} \wedge P_n \}$$

ونشان می‌دهیم $S = \mathbb{N}$ • حال برای اثبات تساوی $S = \mathbb{N}$ از اصل (ج) استفاده می‌کنیم • یعنی باید نشان دهیم که $1 \in S$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، اگر $n \in S$، آنگاه $n+1 \in S$ ؛ بعبارت دیگر باید نشان دهیم که P_1 برقرار است و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، اگر P_n برقرار باشد ، آنگاه P_{n+1} نیز برقرار است • این همان استقرا ریاضی است که درفصل ۱ بیان گردید •

۳-۱-۷ : قضیه :

(الف) عمل جمع روی $\mathbb{N}$ شرکت پذیر است •

(ب) عمل جمع روی N جابجایی است.

(ج) عمل ضرب روی N شرکت‌پذیر است.

(د) عمل ضرب روی N جابجایی است.

(هـ) ضرب نسبت به جمع روی N پخشی است.

اثبات :

(الف) فرض کنیم m و n دو عنصر دلخواه در N باشند. تعریف می‌کنیم :

$$S=\{p \mid p\in N \wedge (m+n)+p=m+(n+p)\}$$

با استفاده از ۲-۱-۷ (الف) داریم :

$$(m+n)+1=s(m+n)=m+s(n)=m+(n+1)$$

پس $1\in S$. فرض کنیم $p\in S$. در اینصورت ،

$$(m+n)+p=m+(n+p) \qquad (1)$$

حال با استفاده از ۲-۱-۷ (الف) و تساوی (۱)، داریم :

$$(m+n)+s(p)=s((m+n)+p)=s(m+(n+p))=m+s(n+p)=m+(n+s(p))$$

پس $s(p)\in S$ و در نتیجه بنابه اصل (ج) ، $S=N$ بنابراین جمع روی N شرکت‌پذیر است.

(ب) ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $m\in N$ ، داریم $m+1=1+m$. برای اینکار با درنظر گرفتن ۲-۱-۷ (الف) ، کافیست نشان دهیم که برای هر $m\in N$، داریم $1+m=s(m)$. فرض کنیم :

$$S=\{m \mid m\in N \wedge 1+m=s(m)\}$$

بنابه ۲-۱-۷ (الف) ، $s(1)=1+1$ و درنتیجه $1\in S$. فرض کنیم $m\in S$. در اینصورت ،

$$1+m=s(m) \qquad (2)$$

با استفاده از ۲-۱-۷ (الف) و تساوی (۲)، داریم :

$$1+s(m)=s(1+m)=s(s(m))$$

پس $s(m)\in S$ و در نتیجه بنابه اصل (ج) ، $S=N$ • بنابراین $m+1=1+m$ برای هر $m\in N$ • حال فرض کنیم m یك عنصر دلخواه N باشد • تعریف می‌کنیم :

$$T=\{n \mid n\in N\wedge \; m+n=n+m\}$$

بنابه اثبات فوق $1\in T$ • فرض کنیم $n\in T$ • در اینصورت ،

$$m+n=n+m \qquad (۳)$$

با استفاده از ۲-۱-۷ (الف) ، تساوی (۳) وبند (الف) ، داریم :

$$m+s(n)=s(m+n)=s(n+m)=n+s(m)=n+(1+m)=(n+1)+m=s(n)+m$$

پس $s(n)\in T$ و در نتیجه بنا به اصل (ج) ، $T=N$ • بنابراین جمع روی N جابجایی است •

برای اثبات بند های (ج) و (د) ، از بند (هـ) استفاده می‌شود • لذا ابتدا بند (هـ) را اثبات می‌کنیم •

(هـ) فرض کنیم m و n دو عنصر دلخواه N باشند • تعریف می‌کنیم :

$$S=\{P \mid P\in N\wedge \; m(n+P)=mn+mP\}$$

با استفاده از ۲-۱-۷، داریم :

$$m(n+1)=ms(n)=mn+m=mn+m1$$

پس $1\in S$ • فرض کنیم $P\in S$ • در اینصورت ،

$$m(n+P)=mn+mP \qquad (٤)$$

حال بااستفاده از ۲-۱-۷، تساوی (٤) و بند (الف) ، داریم :

$$m(n+s(P))=ms(n+P)=m(n+P)+m=(mn+mP)+m=mn+(mP+m)=mn+ms(P)$$

پس $s(P)\in S$ و در نتیجه بنا به اصل (ج) ، $S=N$ • بنابراین ضرب نسبت به جمع روی N پخش است •

(ج) فرض کنیم m و n دو عنصر دلخواه N باشند • تعریف می‌کنیم :

$$S=\{p \mid p\in N \wedge (mn)p=m(np)\}$$

بنابه ۲-۱-۷ (ب) ، داریم :

$$(mn)1=mn=m(n1)$$

پس $1\in S$ • فرض کنیم $p\in S$ • در اینصورت ،

$$(mn)p=m(np) \qquad (5)$$

حال با استفاده از ۲-۱-۷ (ب) ، تساوی (۵)، بند (هـ)، داریم :

$$(mn)s(p)=(mn)p+mn=m(np)+mn=m(np+n)=m(n\,s(p))$$

پس $s(p)\in S$ و در نتیجه بنابه اصل (ج) ، $S=N$ • بنابراین ضرب روی N شرکت پذیر است •

(د) ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $m\in N$ ، داریم $m1=1m$ • برای اینکار با در نظر گرفتن ۲-۱-۷ (ب) ، کافیست نشان دهیم که برای هر $m\in N$ ، داریم $1m=m$ • فرض کنیم :

$$S=\{m \mid m\in N \wedge 1m=m\}$$

بنا به ۲-۱-۷ (ب)، $1.1=1$ و در نتیجه $1\in S$ • فرض‌کنیم $m\in S$. در اینصورت ،

$$1m=m \qquad (6)$$

بااستفاده از ۲-۱-۷ و تساوی (۶)، داریم :

$$1s(m)=1m+1=m+1=s(m)$$

پس $s(m)\in S$ و در نتیجه بنا به اصل (ج) ، $S=N$ • بنابراین $m1=1m$ ، برای هر $m\in N$ • حال فرض کنیم m یك عنصر دلخواه N باشد • تعریف میکنیم :

$$T=\{n \mid n\in N \wedge mn=nm\}.$$

بنابه اثبات فوق ، $1\in T$ • فرض کنیم $n\in T$ • در اینصورت

$$mn=nm \qquad (7)$$

با استفاده از ۲-۱-۷ (ب) و تساوی (۷)، داریم :

$$m\,s(n) = mn + m = nm + m$$

اگر ثابت کنیم $nm + m = s(n)\cdot m$ ، آنگاه نتیجه می‌شود که $m\,s(n) = s(n)\,m$

پس تعریف می‌کنیم :

$$U = \{ m \mid m \in N \wedge nm + m = s(n)\cdot m \}$$

با استفاده از ۲-۱-۷، داریم :

$$n1 + 1 = n + 1 = s(n) = s(n1)$$

پس $1 \in U$ • فرض کنیم $m \in U$ • در اینصورت ،

$$nm + m = s(n)\cdot m \qquad (۸)$$

حال با استفاده از ۲-۱-۷، بند (الف) ، بند (ب) و تساوی ۸، داریم :

$$n\,s(m) + s(m) = (nm + n) + (m+1) = nm + (n + (m+1)) = nm + ((n + m) + 1)$$

$$= nm + ((m+n) + 1) = nm + (m + (n+1)) = (nm + m) + (n+1)$$

$$= s(n)\cdot m + s(n) = s(n)\,s(m)$$

پس $s(m) \in U$ و در نتیجه بنابه اصل (ج)، $U = N$ • بنابراین $m\,s(n) = s(n)\,m$ و در نتیجه $s(n) \in T$ • پس بنا به اصل (ج)، $T = N$ • بنابراین ضرب روی N جابجایی است •

<u>۷-۱-۴ : تمرین</u> : نشان دهیدکه :

(الف) برای هر $m, n \in N$ ، اگر $m+1 = n+1$ ، آنگاه $m = n$ •

(ب) برای هر $n \in N$ ، داریم $n \neq s(n)$ •

(ج) برای هر $m, n \in N$ ، داریم $m + n \neq m$ •

(د) برای هر $m, n \in N$ ، اگر $n = mn$ ، آنگاه $m = 1$ •

<u>۷-۱-۵ : قضیه</u> : برای هر $m, n, p \in N$ داریم :

(الف) $$m + p = n + p \Longrightarrow m = n$$

(ب) $$mp = np \Longrightarrow m = n$$

اثبات :

(الف) فرض کنیم m و n دو عنصر دلخواه $\mathbb{N}$ باشند • تعریف می‌کنیم :

$$S = \{ p \mid p \in \mathbb{N} \wedge (m + p = n + p \Longrightarrow m = n) \}$$

بنابه ۴-۱-۷ (الف) ، $1 \in S$.فرض کنیم $p \in S$ • در اینصورت،

$$m + p = n + p \Longrightarrow m = n \qquad (1)$$

حال بااستفاده از ۲-۱-۷ (الف) ، اصل (ب) وجمله (۱) داریم :

$$m + s(p) = n + s(p) \Longrightarrow s(m+p) = s(n+p)$$

$$\Longrightarrow m + p = n + p$$

$$\Longrightarrow m = n$$

پس $s(p) \in S$ و درنتیجه بنابه اصل (ج)، $S = \mathbb{N}$ • بنابراین بند (الف) بر قرار است •

(ب) فرض کنیم p یك عنصر دلخواه $\mathbb{N}$ باشد • برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، تعریف می‌کنیم :

$$S = \{ m \mid m \in \mathbb{N} \wedge (mp = np \Longrightarrow m = n) \}$$

اگر $1p = np$ ، آنگاه $p = np$ وبنابه ۴-۱-۷ (د) ، $n = 1$.پس $1 \in S$ •فرض کنیم $m \in S$ و $s(m)p = np$ • بنابه ۳-۱-۷ (د)، $s(m)p = ps(m)$ و بنا به ۲-۱-۷ (ب) ، $ps(m) = pm + p$ •پس بنا به ۳-۱-۷ (د) ، $mp + p = np$ • اگر $n = 1$ ، آنگاه $mp + p = p$ که یك تناقض بـه ۴-۱-۷ (ج) است • پس $n \neq 1$ و درنتیجه بنابه ۱-۱-۷، $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n = s(k)$ • پس با استفاده از ۳-۱-۷ (د) و ۲-۱-۷ (ب) داریم :

$$mp + p = s(k)p = ps(k) = pk + p + p$$

پس بنابه بند (الف)، $mp = kp$ وچون $m \in S$ ، پس $m = k$ و درنتیجه،

$$s(m) = s(k) = n$$

پس $s(m) \in S$ و درنتیجه بنابه اصل (ج) ، $S = \mathbb{N}$ • بنابراین بند (ب)

برقرار است •

تذکر :

همانطوریکه در تذکر بعداز (۲-۲-۶ اشاره شد ، جملات بند (الف) و (ب) در ۵-۱-۷ قوانین حذف می‌باشند و قضیه فوق می‌گوید که قوانین حذف نسبت به هردو عمل جمع و ضرب روی $\mathbb{N}$ برقرارند •

۶-۱-۷ : تعریف : رابطه $<$ را روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$m < n \Longleftrightarrow \exists r \,(r \in \mathbb{N} \wedge n = m + r)$$

۷-۱-۷ : تمرین : نشان دهید که :

(الف) r درجمله فوق یکتا است •

(ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم $n < s(n)$ •

تذکر : طبق معمول می‌توان روابط $\leqslant$ ، $>$ و $\geqslant$ روی $\mathbb{N}$ را بصورت زیر تعریف کرد :

$$m \leqslant n \Longleftrightarrow m = n \vee m < n$$

$$m > n \Longleftrightarrow n < m$$

$$m \geqslant n \Longleftrightarrow n \leqslant m$$

۸-۱-۷ : تمرین : نشان دهید که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ ، داریم :

$$m < n \Longleftrightarrow s(m) \leqslant n$$

۹-۱-۷ : قضیه : رابطه $<$ روی $\mathbb{N}$ ، تعریف شده در ۶-۱-۷ یک رابطه ترتیب خطی اکید است •

اثبات : فرض کنیم $m, n, p \in \mathbb{N}$ بطوریکه $m < n$ و $n < p$ • در اینصورت

$r, t \in N$ وجود دارند بطوریکه $n = m + r$ و $p = n + t$ • پس داریم :

$$p = (m+r)+t = m+(r+t)$$

که در آن $r+t \in N$ و در نتیجه $m < p$ بنابراین $<$ انتقالی است • حال فرض کنیم m یك عنصر دلخواه N باشد • تعریف می‌کنیم :

$$S = \{n \mid n \in N \wedge (n = m \vee n < m \vee m < n)\}$$

اگر $m = 1$ ، آنگاه بنابه تعریف S ، $1 \in S$ • اگر $m \neq 1$ ، آنگاه بنابه ۱-۱-۷ ، $k \in N$ وجود دارد بطوریکه $m = s(k)$ و در نتیجه بنابه ۲-۱-۷ (الف) و ۳-۱-۷ (ب) ،

$$m = k+1 = 1+k$$

بنابراین $1 < m$ و از تعریف S نتیجه می‌شود که $1 \in S$ • پس در هرحالت $1 \in S$ • حال فرض کنیم $n \in S$ • در اینصورت :

$$n = m \vee n < m \vee m < n$$

اگر $n = m$ ، آنگاه بنابه ۷-۱-۷ (ب) ، $m < s(n)$ و بنابه تعریف S ، $s(n) \in S$ • اگر $m < n$ ، آنگاه چون بنابه ۷-۱-۷ (ب) ، $n < s(n)$ و $<$ انتقالی است ، پس $m < s(n)$ و در نتیجه بنابه تعریف S ، $s(n) \in S$ • فرض کنیم $n < m$ • در اینصورت بنابه ۸-۱-۷ ، $s(n) \leqslant m$ • اگر $s(n) = m$ ، آنگاه بنا به تعریف S ، $s(n) \in S$ و اگر $s(n) < m$ آنگاه بنابه تعریف S ، $s(n) \in S$ • پس در هر حالت $s(n) \in S$ و در نتیجه بنابه اصل (ج) در اصول پآنو ، $S = N$ • بنابراین برای هر $m, n \in N$ ، یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد :

$$m = n \vee m < n \vee n < m$$

حال نشان می‌دهیم که دقیقاً یکی از حالات فوق برقرار است • اگر هریك از حالات فوق با دیگری برقرار باشند ، آنگاه با در نظر گرفتن ۴-۱-۷ (ج) ، تناقض بدست می‌آید • پس دقیقاً یکی از حالات فوق برقرار است و در نتیجه رابطه $<$ یك رابطه ترتیبی خطی اکید روی N است •

<u>۱۰-۱-۷ : نتیجه :</u> رابطه $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی خطی روی N است •

اثبات : از ۳۵-۳-٤ (ج) ، نتیجه می‌شود .

۱۱-۱-۷ : تمرین : فرض کنید $m, n, p, q \in N$. در اینصورت نشان دهید که :

الف) $m \leqslant n \wedge p \leqslant q \Longrightarrow m+p \leqslant n+q$.

ب) $m \leqslant n \wedge p \leqslant q \Longrightarrow mp \leqslant nq$.

ج) $m+p < n+p \Longrightarrow m < n$.

د) $mp < np \Longrightarrow m < n$.

۱۲-۱-۷ : تعریف : مجموعه N ، مجموعه اعداد طبیعی نامیده می‌شود .

تذکر :

در زیر نشان می‌دهیم که دستگاه اعداد طبیعی یکتاست . بدین صورت که هر دستگاه دیگری که در اصول پآنو صدق کند و اعمال جمع ، ضرب و رابطه ترتیبی روی آن بصورتی که اعمال جمع ، ضرب و رابطه ترتیبی روی N تعریف شده اند ، تعریف شوند ، آنگاه این دستگاه با رابطه ترتیبی اش با $(N; +, \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ یکریخت است و در اینصورت همانطوریکه در بند (ب) تذکر بعد از ۱-۳-٦ گفته شد ، این دستگاه با دستگاه اعداد طبیعی یکسان است . پس می‌توان گفت که دستگاه اعداد طبیعی یکتاست .

۱۳-۱-۷ : قضیه :

فرض کنیم مجموعه N' با تابع s' روی N' در اصول پآنو صدق کند و اعمال $+$ و $\cdot$ و رابطه ترتیبی $\leqslant$ روی N' بصورتی که اعمال جمع، ضرب و رابطه ترتیبی روی N تعریف شده اند ، تعریف شده باشند . در اینصورت تابع $f : N \to N'$ وجود دارد بطوریکه f یك یکریختی از $(N; +, \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ به $(N'; +, \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ است و بعلاوه داریم :

الف) $f(1) = 1'$

(ب) $f(s(n)) = s'(f(n))$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

<u>اثبات :</u> با استفاده از تعریف بازگشتی ، تابع f از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}'$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$f(1) = 1'$ و $f(s(n)) = s'(f(n))$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

از تعریف روشن است که تابع f در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کند . نشان می‌دهیم که f یک یکریختی از $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ به $(\mathbb{N}', +, \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ است .

ابتدا نشان می‌دهیم که f پوشاست . تعریف می‌کنیم :

$$S' = \{ n' \mid n' \in \mathbb{N}' \wedge \exists n (n \in \mathbb{N} \wedge n' = f(n)) \}$$

چون $1' = f(1)$ ، پس $1' \in S'$. فرض کنیم $n' \in S'$. در اینصورت $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n' = f(n)$. پس با استفاده از تساوی (ب) این قضیه داریم :

$$s'(n') = s'(f(n)) = f(s(n))$$

که در آن $s(n) \in \mathbb{N}$. بنابراین $s'(n') \in S'$ و در نتیجه بنابه اصل (ج) در اصول پآنو، $S' = \mathbb{N}'$. پس f پوشاست .

برای نشان دادن یک بیک بودن f ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم :

$$S = \{ m \mid m \in \mathbb{N} \wedge (f(m) = f(n) \Longrightarrow m = n) \}$$

اگر $f(1) = f(n)$ ، آنگاه $n = 1$. زیراکه اگر $n \neq 1$ ، آنگاه بنابه ۱-۱-۷ ، $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n = s(k)$ و با استفاده از تساویهای (الف) و (ب)، داریم :

$$1' = f(1) = f(n) = f(s(k)) = s'(f(k))$$

که یک تناقض به اصل (الف) در اصول پآنو است ، زیرا که $f(k) \in \mathbb{N}'$. پس $n = 1$ و در نتیجه $1 \in S$. فرض کنیم $m \in S$ و $f(s(m)) = f(n)$. در اینصورت $n \neq 1$. زیرا که اگر $n = 1$، آنگاه مانند بالا خواهیم داشت :

$$1' = f(1) = f(s(m)) = s'(f(m))$$

که یك تناقض است. پس $n \neq 1$ و در نتیجه بنابه ۷-۱-۱، $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $s(k)=n$. در اینصورت بنابه تساوی (ب) داریم:

$$f(s(m))=f(s(k)) \Longrightarrow s'(f(m))=s'(f(k))$$

بنا به اصل (ب) در اصول پآنو، s' یك بیك است ودر نتیجه $f(m)=f(k)$. چون $m\in S$، پس $m=k$ و در نتیجه $s(m)=s(k)=n$. بنابراین $s(m)\in S$ و بنابه اصل (ج)، $S=\mathbb{N}$. پس f یك بیك است.

حال نشان می‌دهیم f یك همریختی است. فرض کنیم m یك عنصر دلخواه $\mathbb{N}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$T=\{n \mid n\in \mathbb{N} \wedge (f(m+n)=f(m)+f(n))\}$$

با استفاده از ۷-۱-۲ (الف) و تساویهای (الف) و (ب) داریم:

$$f(m+1)=f(s(m))=s'(f(m))=f(m)+1'=f(m)+f(1)$$

پس $1\in T$. فرض کنیم $n\in T$. در اینصورت:

$$f(m+n)=f(m)+f(n) \qquad (1)$$

با استفاده از ۷-۱-۲ (الف)، تساوی (ب) و تساوی (۱) داریم:

$$f(m+s(n))=f(s(m+n))=s'(f(m+n))=s'(f(m)+f(n))=f(m)+s'(f(n))$$

$$=f(m)+f(s(n))$$

بنابراین $s(n)\in T$ و در نتیجه بنابه اصل (ج)، $T=\mathbb{N}$. پس برای هر $m,n\in \mathbb{N}$، داریم:

$$f(m+n)=f(m)+f(n) \qquad (*)$$

فرض کنیم m یك عنصر دلخواه $\mathbb{N}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$U=\{n \mid n\in \mathbb{N} \wedge (f(mn)=f(m)f(n))\}$$

با استفاده از ۷-۱-۲ (ب) و تساوی (الف) داریم:

$$f(m1)= f(m)= f(m)1'= f(m)f(1)$$

پس $1\in U$ • فرض کنیم $n\in U$ در اینصورت :

$$f(mn) = f(n)f(n) \qquad (۲)$$

بااستفاده از ۲-۱-۷ (ب)، تساوی (*) ، تساوی (۲) و تساوی (ب) داریم :

$$f(m s(n))=f(mn+m)=f(mn)+f(m)=f(m)f(n)+f(m)= f(m)s'(f(n))$$

$$=f(m)f(s(n))$$

بنابراین $s(n)\in U$ و در نتیجه بنابه اصل (ج) ، $U=N$ پس برای هر $m,n\in N$ ، داریـم :

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

حال برای هر $m,n\in N$ ، نشان میدهیم که :

$$m\leqslant n \Longrightarrow f(m)\leqslant f(n)$$

اگر $m=n$ ، آنگاه چون f یک تابع است ، پس $f(m)=f(n)$ • فرض کنیم $m<n$ ، در اینصورت $r\in N$ وجود دارد بطوریکه $n=m+r$ • در اینصورت با استفاده ازتساوی (*) داریم :

$$f(n)=f(m+r)=f(m)+f(r)$$

چون $f(r)\in N'$ ، پس $f(m)<f(n)$ • بنابراین با فرض $m\leqslant n$ ، نتیجه میگیریم که $f(m)\leqslant f(n)$ •

پس f یك یکریختی از $(N ; + , \cdot)$ با $\leqslant$ به $(N' ; + , \cdot)$ با $\leqslant$ اســت •
در اینجا اثبات قضیه یکتایی دستگاه اعداد طبیعی کامل میشود •

<u>۷-۱-۱٤ : تمرین :</u>

(الف) با در نظر گرفتن ۷-۱-۱۳، ثابت کنید که تابع $g:N'\to N$ بطوریکه $g(1')=1$ و $g(s'(n'))=s(g(n'))$ برای هر $n'\in N'$ ، معکوس تابع f است •
(راهنمایی : نشان دهید که مجموعه $S=\{n|n\in N\wedge(g\circ f)(n)=n\}$ مساوی N ومجموعه

$S' = \{n' | n' \in N' \wedge (f\circ g)(n') = n'\}$ مساوی N' است) .

(ب) نشان دهید که ۱ کوچکترین عنصر N تحت رابطه $\leqslant$ است .

۷-۱-۱۵ : تمرین : فرض کنید $m, n \in N$. با استفاده از تعریف بازگشتی ، تعریف کنید :

$$m^1 = m \ , \ m^{n+1} = m^n \ m$$

حال برای هر $m, n, p \in N$ ، نشان دهید که :

(الف) $m^{n+p} = m^n \ m^p$.

(ب) $m^{np} = (m^n)^p$.

(ج) $(mn)^p = m^p n^p$.

۷-۲ : اعداد صحیح

درقسمت قبل فرض کردیم که مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد و با بکار بردن تعداد کمی اصول خواص آنرا بدست آوردیم . ولی ساختمان $(N ; + , \cdot)$ ساختمان کاملی از اعداد نیست و کمبود های متعددی دارد . مثلاً عنصرهمانی نسبت به عمل + در N وجود ندارد . البته این نقصان را می‌توان بسهولت برطرف نمود . بدین صورت که عنصر صفر " ۰ " را به مجموعه N اضافه می‌کنیم و مجموعه $N_0 = N \cup \{0\}$ را بدست می‌آوریم و تابع s را به تابع $\bar{s}$ از N_0 به N_0 بصورت‌زیر بسط دهیم :

$$\bar{s} : N_0 \longrightarrow N_0$$

$$\bar{s}(n) = \begin{cases} s(n) \ ; \ n \in N & \text{اگر} \\ 1 \ ; \ n = 0 & \text{اگر} \end{cases}$$

در اینصورت بسهولت می‌توان دید که $(N_0 , \bar{s})$ در اصول پآنو صدق می‌کند . در اینجا

ملاحظه می‌شود که $0 \notin ran\ \bar{s}$ همچنین برای هر $n \in N$ ، تعریف می‌کنیم ،
$n+0 = 0+n = n$ و $n0 = 0n = 0$.

البته اینکار را می‌توانستیم از اول در قسمت قبل انجام دهیم . بدین صورت که بجای اینکه از ۱ شروع کنیم از ۰ شروع می کردیم و مجموعه N_0 را در نظر می‌گرفتیم . در اینصورت اگر s تابع روی N_0 باشد آنگاه اصول پآنو را در مورد $(N_0$ و $s)$ مانند قسمت قبل بیان می‌کنیم با این تفاوت که بجای داشتن $1 \notin ran\ s$ ، فرض می‌کنیم $0 \notin ran\ s$ و در اینصورت قرار می دهیم $s(0)=1$. همچنین اعمال جمع و ضرب روی N_0 بصورت زیر تعریف می‌شوند :

$m+0=m$ و $m+s(n)=s(m+n)$ برای هر $n \in N_0$
و
$m0=0$ و $ms(n)=mn$ برای هر $n \in N_0$

در اینصورت ادامه بحث برای بدست آوردن خواص $(N_0$ و $+$ و $\cdot)$ تقریباً به همان صورتی است که در قسمت قبل انجام شد . رابطه $\leqslant$ را نیز روی N_0 می‌توان بصورت زیر تعریف کرد :

$$m \leqslant n \iff \exists r (r \in N_0 \wedge n = m+r)$$

و خواص آنرا نیز مانند قسمت قبل بدست آورد . بنابراین ملاحظه می‌شود که با بسط N به N_0 می‌توان کمبود عنصرهمانی نسبت به عمل جمع را بسهولت برطرف کرد . ولی ساختمان $(N_0$ و $+$ و $\cdot)$ نیز کمبود دارد . مثلاً معادله ساده $x+1=0$ در N_0 جواب ندارد . پس نیاز به بسط N_0 به مجموعه کامل تری از اعداد کاملاً مشهود است . در این قسمت به انجام اینکار می‌پردازیم . همچنین در این‌قسمت کاربرد مفاهیمی راکه درقسمت اول فصل ٤ ارائه گردید ، ملاحظه خواهیم کرد .

<u>۷-۲-۱ : تعریف</u> : رابطه $\sim$ را روی مجموعه $N_0 \times N_0$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(m,n) \sim (p,q) \iff m+q = p+n$$

<u>۷-۲-۲ : قضیه</u> : رابطه تعریف‌شده در ۷-۲-۱ یك رابطه هم ارزی روی $N_0 \times N_0$ است .

اثبات :

فرض کنیم $(m,n)\in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ۰ چون $m+n = m+n$ ، پس $(m,n)\sim(m,n)$ و در نتیجه ~ انعکاسی است ۰ فرض کنیم $(p,q)\in \mathbb{N}_0\times \mathbb{N}_0$ و $(m,n)\in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ بطوریکه $(m,n)\sim(p,q)$ ۰ در اینصورت $m+q = p+n$ و در نتیجه $(p,q)\sim(m,n)$. پس ~ متقارن است ۰ حال فرض کنیم $(r,s)\in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ و $(m,n),(p,q)\in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ بطوریکه $(m,n)\sim(p,q)$ و $(p,q)\sim(r,s)$.

در اینصورت $m+q = p+n$ و $p+s = r+q$. پس داریم :

بااستفاده از ۳-۱-۷ (الف) و (ب) :

$$(m+q)+(p+s)=(p+n)+(r+q)\Longrightarrow(m+s)+(p+q)=(r+n)+(p+q)$$

بنابه ۵-۱-۷ (الف) : $\Longrightarrow m+s=r+n$

بنابه ۱-۲-۷ : $\Longrightarrow (m,n)\sim(r,s)$

پس ~ انتقالی است ۰ بنابراین ~ یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ می‌باشد ۰

۳-۲-۷ : تعریف :

فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعه خارج قسمت وابسته به رابطه هم ارزی ~ روی $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ باشد ۰ یعنی فرض کنیم $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0/\sim$ ۰ اگر کلاس هم ارزی هر عنصر (m,n) در $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ را با نماد $[(m,n)]$ نمایش دهیم ، آنگاه داریم :

$$\mathbb{Z}=\left\{[(m,n)] \mid m,n\in\mathbb{N}_0\right\}$$

حال روی $\mathbb{Z}$ دو عمل جمع و ضرب را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[(m,n)]+[(p,q)]=[(m+p,n+q)]$$
$$[(m,n)][(p,q)]=[(mp+nq,mq+np)]$$

تذکر:

بنا به ۱-۱-۶ یک عمل دوتایی روی مجموعه A عبارتست از یک تابع از A×A به A ۰

پس اعمال تعریف شده روی $\mathbb{Z}$ در ۳-۲-۷ باید توابعی از $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ باشند. حال از تعریف این دو عمل کاملاً روشن نیست که توابعی از $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ باشند و باید این مطلب تحقیق شود • یعنی باید نشان داد که اگر

$[(m,n)]=[(m',n')]$ و $[(p,q)]=[(p',q')]$، آنگاه داریم :

$$[(m,n)]+[(p,q)]=[(m',n')]+[(p',q')]$$

و

$$[(m,n)]\,[(p,q)]=[(m',n')]\,[(p',q')]$$

بعد از اثبات دو تساوی فوق ، می‌گوئیم که دو عمل جمع و ضرب روی $\mathbb{Z}$ تعریف شده در ۳-۲-۷، خوش تعریف اند • این مطلب را در زیر اثبات می‌کنیم •

<u>۷-۲-٤ : قضیه :</u> اعمال جمع و ضرب روی $\mathbb{Z}$ تعریف شده در ۳-۲-۷ خوش‌تعریف اند•

<u>اثبات :</u>

فرض کنیم $[(m,n)]=[(m',n')]$ و $[(p,q)]=[(p',q')]$ • بنابه ۲۲-۱-٤، $(m,n)\sim(m',n')$ و $(p,q)\sim(p',q')$، پس داریم :

$$m+n'=m'+n \qquad (1)$$

$$p+q'=p'+q \qquad (2)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که جمع خوش تعریف است • از تساویهای (۱) و (۲) داریم ،

$$(m+n')+(p+q')=(m'+n)+(p'+q) \qquad (3)$$

حال با استفاده از تساوی (۳) و ۳-۱-۷ (الف) و (ب) داریم :

$$(m+p)+(n'+q')=(m'+p')+(n+q)$$

پس $(m+p,n+q)\sim(m'+p',n'+q')$• در اینصورت بنابه ۲۲-۱-٤ ،

$[(m+p,n+q)]=[(m'+p',n'+q')]$ و درنتیجه $[(m,n)]+[(p,q)]=[(m',n')]+[(p',q')]$•

بنابراین جمع خوش تعریف است• حال نشان می‌دهیم که ضرب خوش تعریف است •
با استفاده از تساوی (۱) و ضرب آن در p و سپس در q داریم :

$$m'q + nq = mq + n'q \text{ و } mp + n'p = m'p + np \quad (٤)$$

با استفاده از تساوی (۲) و ضرب آن در m' و سپس در n' داریم :

$$n'p' + n'q = n'p + n'q' \text{ و } m'p + m'q' = m'p' + m'q \quad (٥)$$

حال از تساویهای (٤) و تساویهای (٥) داریم :

(٦)

$$(mp+n'p)+(m'q+nq)+(m'p+m'q')+(n'p'+n'q)=(m'p+np)+(mq+n'q)+(m'p'+m'q)+(n'p+n'q')$$

با استفاده از تساوی (٦)، ۳-۱-۷ (الف) و (ب) داریم :

$$(mp+nq+m'q'+n'p')+(n'p+m'q+m'p+n'q)=(m'p'+n'q'+mq+np)+(n'p+m'q+m'p+n'q)$$

و بنا به ۵-۱-۷ (الف) داریم :

$$mp+nq+m'q'+n'p' = m'p'+n'q'+mq+np$$

پس $(mp+nq, mq+np) \sim (m'p'+n'q', m'q'+n'p')$ ودر نتیجه

بنا به ۲۲-۱-٤، $[(mp+nq, mq+np)] \sim [(m'p'+n'q', m'q'+n'p')]$• بنابراین

داریم :

$$[(m,n)][(p,q)] = [(m',n')][(p',q')]$$

پس ضرب خوش تعریف است•

<u>۷-۲-۵ : قضیه</u> : ساختمان جبری $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی است •

<u>اثبات</u> : فرض کنیم $[(m,n)]$، $[(p,q)]$ و $[(r,s)] \in \mathbb{Z}$•

نشان می‌دهیم که جمع شرکت‌پذیر است •

بنا به ۳-۲-۷ : $([(m,n)]+[(p,q)])+[(r,s)]=[(m+p,n+q)]+[(r,s)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[((m+p)+r,(n+q)+s)]$

بنابه ۳-۱-۷ (الف) : $=[(m+(p+r),n+(q+s))]$

بنابه ۳-۲-۷ : $=[(m,n)]+[(p+r,q+s)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(m,n)]+([(p,q)]+[(r,s)])$

پس جمع شرکت‌پذیر است •

نشان می‌دهیم جمع جابجایی است •

بنابه ۳-۲-۷ : $[(m,n)]+[(p,q)]=[(m+p,n+q)]$

بنابه ۳-۱-۷ (ب) : $=[(p+m,q+n)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(p,q)]+[(m,n)]$

پس جمع جابجایی است•

نشان می‌دهیم $[(0,0)]$ عنصر صفر $\mathbb{Z}$ است•

بنابه ۳-۲-۷ : $[(m,n)]+[(0,0)]=[(m+0,n+0)]$

بنابه همانی‌بودن ۰ در N_0 نسبت به + : $=[(m,n)]$

پس $[(0,0)]$ عنصر صفر $\mathbb{Z}$ است•

نشان می‌دهیم که $[(n,m)]$ معکوس $[(m,n)]$ نسبت به عمل جمع است •

بنا به ۳-۲-۷ : $[(m,n)]+[(n,m)]=[(m+n,n+m)]$

بنابه ۳-۱-۷ (ب) : $=[(m+n,m+n)]$

چون $(m+n)+0=0+(m+n)$ است ، پس $(m+n,m+n)\sim(0,0)$ و در نتیجه بنابه ۲۲-۱-٤، $[(m+n,m+n)]=[(0,0)]$ • پس داریم :

$$[(m,n)]+[(n,m)]=[(0,0)]$$

از جابجایی بودن جمع نتیجه می‌شود :

$$[(n,m)]+[(m,n)]=[(0,0)]$$

بنابراین $[(n,m)]$ عنصر معکوس $[(m,n)]$ نسبت به عمل جمع است • پس $(\mathbb{Z};+)$ یک گروه آبلی است •

نشان می‌دهیم که ضرب شرکت‌پذیر است •

بنابه ۳-۲-۷ : $\Big([(m,n)][(p,q)]\Big)[(r,s)]=[(mp+nq,mq+np)][(r,s)]$

بنابه ۳-۲-۷ : $=\Big[\Big((mp+nq)r+(mq+np)s,(mp+nq)s+(mq+np)r\Big)\Big]$

بنابه ۳-۱-۷ (هـ) : $=\Big[\Big((mp)r+(nq)r+(mq)s+(np)s,(mp)s+(nq)s+(mq)r+(np)r\Big)\Big]$

بنا به ۳-۱-۷ (ج) $=\Big[\Big(m(pr)+n(qr)+m(qs)+n(ps),\ m(ps)+n(qs)+m(qr)+n(pr)\Big)\Big]$

بنابه ۳-۱-۷ (ب) $=\Big[\Big(m(pr)+m(qs)+n(qr)+n(ps),m(ps)+m(qr)+n(qs)+n(pr)\Big)\Big]$

بنابه ۳-۱-۷ (هـ) : $=\Big[\Big(m(pr+qs)+n(qr+ps),m(ps+qr)+n(qs+pr)\Big)\Big]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(m,n)][(pr+qs,qs+pr)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(m,n)]\Big([(p,q)][(r,s)]\Big)$

پس ضرب شرکت‌پذیر است •

نشان می‌دهیم ضرب جابجایی است .

بنا به ۳-۲-۷ : $[(m,n)][(p,q)]=[(mp+nq\,,\,mq+np)]$

بنابه ۳-۱-۷ (د) $=[(pm+qn\,,\,qm+pn)]$

بنابه ۳-۲-۷ : $=[(p,q)][(m,n)]$

پس ضرب جابجایی است .

نشان می‌دهیم $[(1,0)]$ عنصر همانی $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل ضرب است .

بنا به ۳-۲-۷ : $[(m,n)][(1,0)]=[(m1+n0\,,\,m0+n1)]$

بنا به همانی‌بودن ۰ نسبت به + و همانی‌بودن ۱ نسبت به . در N_0 : $=[(m,n)]$

پس $[(1,0)]$ عنصر همانی $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل ضرب است .

نشان می‌دهیم ضرب نسبت به جمع پخش است .

بنا به ۳-۲-۷ : $[(m,n)]\big([(p,q)]+[(r,s)]\big)=[(m,n)][(p+r,q+s)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(m(p+r)+n(q+s)\,,\,m(q+s)+n(p+r))]$

بنابه ۳-۱-۷(هـ) : $=[(mp+mr+nq+ns\,,\,mq+ms+np+nr)]$

بنا به ۳-۱-۷ (الف) و (ب) : $=[(mp+mr+nq+ns\,,\,mq+ms+np+nr)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(mp+nq\,,\,mq+np)]+[(mr+ns\,,\,ms+nr)]$

بنا به ۳-۲-۷ : $=[(m,n)][(p,q)]+[(m,n)][(r,s)]$

حال با استفاده از نتیجه فوق و جابجایی بودن ضرب داریم :

$$\big([(m,n)]+[(p,q)]\big)[(r,s)]=$$

$$=[(r,s)][(m,n)]+[(r,s)][(p,q)]$$

$$=[(m,n)][(r,s)]+[(p,q)][(r,s)]$$

بنابراین ضرب نسبت به جمع پخش است . پس $(\mathbb{Z}\,,+\,,\cdot)$ یک حلقه یکانی وجابجایی

می‌باشد •

۷-۲-۶ : تمرین : فرض کنید $[(m,n)] \in \mathbb{Z}$. نشان دهید که :

(الف) $m = n \Longleftrightarrow [(m,n)] = [(0,0)]$ •

(ب) $m = n+1 \Longleftrightarrow [(m,n)] = [(1,0)]$ •

۷-۲-۷ : تعریف : زیر مجموعه $\mathbb{Z}^+$ از $\mathbb{Z}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\mathbb{Z}^+ = \{[(m,n)] \mid [(m,n)] \in \mathbb{Z} \wedge m > n\}$$

۷-۲-۸ : مثال : در N_0 چون ۱ + ۰ = ۱، پس ۰ < ۱ و درنتیجه $[(1,0)] \in \mathbb{Z}^+$.

با استفاده از ۷-۱-۷ (ب) ، برای هر $n \in N_0$ داریم $S(n) > n$ پس برای هر $n \in N_0$ ، $[(S(n),n)] \in \mathbb{Z}^+$.

۷-۲-۹ : قضیه :

با درنظر گرفتن زیر مجموعه $\mathbb{Z}^+$ از $\mathbb{Z}$ ، $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ یک حلقه یکانی وجابجائی مرتب است •

اثبات :

بنابه ۷-۲-۵، $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی است • حال بایدنشان دهیم که :

(الف) $[(m,n)], [(P,q)] \in \mathbb{Z}^+ \Longrightarrow [(m,n)] + [(P,q)] \in \mathbb{Z}^+ \wedge [(m,n)]\,[(P,q)] \in \mathbb{Z}^+$

(ب) برای هر $[(m,n)] \in \mathbb{Z}$ دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است :

$$[(m,n)] = [(0,0)] \vee [(m,n)] \in \mathbb{Z}^+ \vee -[(m,n)] = [(n,m)] \in \mathbb{Z}^+$$

۷-۲-۱۰ : تمرین

بندهای (الف) و(ب) درقضیه فوق رااثبات کنید •

۷ـ۲ـ۱۱ : تعریف :

رابطه $<$ روی $\mathbb{Z}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$[(m,n)] < [(p,q)] \iff [(p,q)] + [(n,m)] \in \mathbb{Z}^+$$

بعبارت دیگر :

$$[(m,n)] < [(p,q)] \iff p+n > q+m$$

۷-۲-۱۲ : نتیجه : رابطه $<$ روی $\mathbb{Z}$ تعریف شده در ۷-۲-۱۱ یک رابطه ترتیبی خطی اکیداست •

اثبات : از ۶-۲-۵۳ نتیجه می‌شود •

تذکر :

اگر رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{Z}$ را طبق معمول بصورت زیر تعریف کنیم، آنگاه بنا به ۴-۳-۳۵، یک رابطه ترتیبی خطی است •

$$[(m,n)] \leqslant [(p,q)] \iff [(m,n)] = [(p,q)] \vee [(m,n)] < [(p,q)]$$

۷-۲-۱۳ : تعریف : مجموعه $\mathbb{Z}$ ، مجموعه اعداد صحیح نامیده می‌شود •

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که $(N ; + , \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ با $(\mathbb{Z}^+ ; + , \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ یکریخت است • بعبارت دیگر نشان می‌دهیم که $(N ; + , \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ را می‌توان در $(\mathbb{Z} ; + , \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ محاط کرد •

۷-۲-۱٤ : قضیه :

تابع $f : N \to \mathbb{Z}^+$ بطوریکه $f(n) = [(n, 0)]$ برای هر $n \in N$، یک یکریختی از $(N ; + , \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ به $(\mathbb{Z}^+ ; + , \cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ است •

اثبات :

نشان می‌دهیم که f یک بیک است • فرض کنیم $f(m) = f(n)$ • در اینصورت داریم :

بنابه ۲۲-۱-٤ : $[(m,0)]=[(n,0)] \Longrightarrow (m,0)\sim(n,0)$

بنابه ۱-۲-۷ : $\Longrightarrow m+0=0+n$

بنابه همانی بودن ۰ نسبت عمل جمع در N_0 : $\Longrightarrow m=n$

پس f یك بیك است• نشان میدهیم که f پوشاست • فرض کنیم $[(m,n)]\in \mathbb{Z}^+$ ۰در اینصورت ، $m>n$ و در نتیجه $r\in N$ وجود دارد بطوریکه $m=n+r$ ۰در اینصورت $[(m,n)]=[(r,0)]$ ، زیراکه داریم :

بنابه ۱-۲-۷ : $m+0=n+r \Longrightarrow (m,n)\sim(r,0)$

بنابه ۲۲-۱-٤ : $\Longrightarrow [(m,n)]=[(r,0)]$

حال ، $[(m,n)]=[(r,0)]=f(r)$ و در نتیجه f پوشاست • برای هر $m,n\in N$ نشان میدهیم که :

$$f(m+n)=f(m)+f(n)$$

داریم :

بنابه تعریف f : $f(m+n)=[(m+n,0)]$

بنابه ۳-۲-۷ : $=[(m,0)]+[(n,0)]$

بنا به تعریف f : $=f(m)+f(n)$

برای هر $m,n\in N$ نشان میدهیم که :

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

داریم :

بنابه تعریف f : $f(mn)=[(mn,0)]$

بنابه ۳-۲-۷ : $=[(m,0)][(n,0)]$

بنا به تعریف f : $=f(m)f(n)$

حال برای هر $m,n\in N$ ، نشان میدهیم که :

$$m\leqslant n \Longrightarrow f(m)\leqslant f(n)$$

اگر $m=n$ ، چون f یكتابع است ، پس $f(m)=f(n)$ • فرض کنیم $m<n$ ۰

دراینصورت ، $m+0<n+0$ و درنتیجه بنابه ۱۱-۲-۷، $[(n,0)]>[(m,0)]$. پس $f(m)<f(n)$ • بنابراین بافرض $m \leqslant n$ ، نتیجه می‌شودکه $f(m) \leqslant f(n)$.
پس f یک یکریختی است•

تذکر :

همانطوریکه دربند (ب) تذکر بعداز ۱-۳-۶ گفته شد ، اگر دو ساختمان جبری با هم یکریخت باشند ، آنگاه خواص ساختمانی مشترکی دارند و درنتیجه می‌توان آنها را یکسان فرض کرد • پس بااستفاده ازقضیه فوق ، اگر ساختمان جبری $(N;+,\cdot)$ با رابطه $\leqslant$ را با ساختمان جبری $(Z^+;+,\cdot)$ با رابطه ترتیب $\leqslant$ ، یکسان درنظر بگیریم ، آنگاه می‌توان فرض کرد که $(N;+,\cdot)$ درداخل $(Z;+,\cdot)$ قرار دارد•
درواقع با این فرض هر عنصر $[(m,0)] \in Z^+$ را با $m \in N$ نمایش می‌دهیم•
همچنین عنصر $[(0,0)]$ در Z را با 0 نمایش می‌دهیم • برای هر $[(n,0)] \in Z$، چون $[(0,n)] = -[(n,0)]$ ، پس $[(0,n)]$ با $-n$ نمایش داده می‌شود •
دراینصورت چون برای هر $[(m,n)] \in Z$ داریم، $[(m,n)] = [(m,0)] + [(0,n)]$، پس

هر $[(m,n)]$ با نماد $m-n$ نمایش داده می‌شود •

۱۵-۲-۷ : تمرین : فرض کنید $a,b,c \in Z$. نشان دهیدکه :

(الف) $ab=0 \Longleftrightarrow a=0 \vee b=0$.

(ب) $a+c=b+c \Longrightarrow a=b$.

(ج) $ac=bc \wedge c\neq 0 \Longrightarrow a=b$.

(د) $a<b \Longleftrightarrow a+c<b+c$.

(هـ) $a<b \wedge c>0 \Longrightarrow ac<bc$.

۳-۷ : اعداد گویا :

معادله $2x = 1$ در Z جواب ندارد • دراین قسمت مجموعه اعداد صحیح را به یک مجموعهٔ ازاعداد بسط می‌دهیم که در مجموعه جدید معادله هایی نظیر $2x = 1$

جواب داشته باشند. روش بسط $\mathbb{Z}$ به این مجموعه جدید از اعداد مشابه روش بسط $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ است که در قسمت قبل ارائه گردید. در اینجا نیز از مفاهیم رابطه هم ارزی و مجموعه خارج قسمت وابسته به آن استفاده خواهیم کرد.

۷-۳-۱ : تعریف : مجموعه زیر را در نظر میگیریم :

$$S=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\}$$

رابطه $\sim$ را روی S بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$(a,b)\sim(c,d)\iff ad=bc$$

۷-۳-۲ : قضیه : رابطه $\sim$ روی S تعریف شده در ۷-۳-۱ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات :

فرض کنیم $(a,b)\in S$. بنابه ۷-۲-۵، $ab=ba$ و در نتیجه $(a,b)\sim(a,b)$. پس $\sim$ انعکاسی است. فرض کنیم $(a,b),(c,d)\in S$ و $(a,b)\sim(c,d)$. در اینصورت $ad=bc$ و بنابه ۷-۲-۵، $cb=da$ و در نتیجه $(c,d)\sim(a,b)$. پس $\sim$ متقارن است.

حال فرض کنیم $(a,b),(c,d),(e,f)\in S$ و $(a,b)\sim(c,d)$ و $(c,d)\sim(e,f)$. در اینصورت داریم :

$$ad=bc \quad (۱)$$

و

$$cf=de \quad (۲)$$

با ضرب تساوی (۱) در f و ضرب تساوی (۲) در b و با استفاده از ۷-۲-۵ داریم :

$$afd=bcf \quad \text{و} \quad bcf=bed$$

و در نتیجه $afd = bed$ • چون $d \neq 0$، بنابه ۱۵-۲-۷ (ج) ، $af = be$
و در نتیجه $(a, b) \sim (e, f)$• پس ~ انتقالی است • بنابراین ~ یک رابطه هم ارزی می‌باشد •

<u>۳-۳-۷ : تعریف :</u>

فرض کنیم Q مجموعه خارج قسمت وابسته به رابطه هم ارزی ~ روی S باشد • یعنی $Q = S/_{\sim}$ • اگر کلاس هم ارزی هر عنصر (a, b) از S را با نماد $[(a, b)]$ نمایش دهیم ، آنگاه داریم :

$$Q = \left\{ [(a, b)] \,\middle|\, (a, b) \in S \right\}$$

حال روی Q دو عمل جمع و ضرب را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$$

و

$$[(a, b)][(c, d)] = [(ac, bd)]$$

همانطوریکه در قسمت قبل نشان دادیم که اعمال جمع و ضرب روی $\mathbb{Z}$ خوش‌تعریف اند، در اینجانیز نشان می‌دهیم که اعمال فوق روی Q خوش تعریف اند •

<u>۴-۳-۷ : قضیه :</u> اعمال جمع و ضرب روی Q تعریف شده در ۳-۳-۷، خوش تعریف اند •

<u>اثبات :</u>

فرض کنیم $[(a, b)] = [(a', b')]$ و $[(c, d)] = [(c', d')]$• در اینصورت بنا به ۲۲-۱-۴، $(a, b) \sim (a', b')$ و $(c, d) \sim (c', d')$• پس داریم :

$$ab' = ba' \qquad (1)$$

و

$$cd' = dc' \qquad (2)$$

نشان می‌دهیم که جمع خوش تعریف است • ابتدا ملاحظه می‌کنیم که چون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، پس بنابه ۱۵-۲-۷ (الف)، $bd \neq 0$ و در نتیجه $[(ad+bc, bd)] \in Q$ • همچنین چون $b' \neq 0$، $d' \neq 0$ پس $b'd' \neq 0$ و در نتیجه $[(a'd'+b'c', b'd')] \in Q$ • حال نشان می‌دهیم که :

$$[(ad+bc, bd)] = [(a'd'+b'c', b'd')]$$

تساوی (۱) را در dd' و تساوی (۲) را در bb' ضرب می‌کنیم • در اینصورت داریم :

$$ab'dd' = ba'dd' \ , \ bb'cd' = bb'dc' \cdot \qquad (۳)$$

بااستفاده ازتساویهای (۳) و ۵-۲-۷ داریم :

$$(ad+bc)b'd' = bd(a'd'+b'c')$$

پس $(ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$ و در نتیجه بنابه ۲۲-۱-۴، $[(ad+bc, bd)] = [(a'd'+b'c', b'd')]$ • بنابراین :

$$[(a,b)]+[(c,d)] = [(a',b')]+[(c',d')]$$

پس جمع خوش تعریف است • نشان می‌دهیم که ضرب خوش تعریف • مانند بالا، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $bd \neq 0$ و $b'd' \neq 0$ و در نتیجه $[(a'c', b'd')] \in Q$ و $[(ac, bd)]$ • نشان می‌دهیم که :

$$[(ac, bd)] = [(a'c', b'd')]$$

با استفاده ازتساویهای (۱) و (۲) و ۵-۲-۷ داریم :

$$(ac)(b'd') = (bd)(a'c')$$

پس $(ac, bd) \sim (a'c', b'd')$ و در نتیجه بنابه ۲۲-۱-۴، $[(ac, bd)] = [(a'c', b'd')]$. بنابراین : $[(a,b)][(c,d)] = [(a',b')][(c',d')]$

پس ضرب خوش تعریف است •

۵-۳-۷ : قضیه : ساختمان جبری $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ یك هیات است •

اثبـــات: باید نشان دهیم که :

(الف) جمع شرکت پذیر است •

(ب) جمع جابجایی است •

(ج) $(\mathbb{Q}, +)$ عنصر همانی دارد •

(د) هر عنصر در $\mathbb{Q}$ نسبت به عمل + معکوس دارد •

(هـ) ضرب شرکت پذیر است •

(و) ضرب جابجایی است •

(ز) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ عنصر همانی دارد •

(ح) هر عنصر در $\mathbb{Q}-\{0\}$ نسبت به عمل • معکوس دارد •

(ط) ضرب نسبت به جمع پخش است •

در اینجا بندهای (ج)، (د)، (ز) و (ح) را اثبات می‌کنیم • اثبات سایربندها بعنوان تمرین است •

(ج) عنصر $[(0, 1)]$ عنصر همانی $\mathbb{Q}$ نسبت عمل جمع است • زیرا که برای هـــر $[(a, b)] \in \mathbb{Q}$ داریم:

$$[(a, b)] + [(0, 1)] = [(a1 + b0, b1)] = [(a, b)]$$

و

$$[(0, 1)] + [(a, b)] = [(0b + 1a, 1b)] = [(a, b)]$$

پس $(\mathbb{Q}, +)$ عنصر همانی دارد •

(د) برای هر $[(a, b)] \in \mathbb{Q}$، عنصر $[(-a, b)]$ معکوس $[(a, b)]$ نسبت به عمل جمع است • زیرا که داریم :

$$[(a, b)] + [(-a, b)] = [(ab - ba, b^2)] = [(0, n^2)]$$

حال چون $0 1 = n^2 0$ ، پس $(0, 1) \sim (0, n^2)$ و در نتیجه بنابه ۲۲-۱-٤، $[(0, n^2)] \sim [(0, 1)]$ • بنابراین :

$$[(a,b)] + [(-a,b)] = [(0,1)]$$

بطریق مشابه $[(-a,b)]+[(a,b)] = [(0,1)]$. پس $[(-a,b)]$ معکوس $[(a,b)]$ نسبت به عمل جمع است.

(ز) عنصر $[(1,1)]$ عنصر همانی Q نسبت به عمل ضرب است. زیرا که برای هر $[(a,b)] \in Q$ داریم :

$$[(a,b)][(1,1)] = [(a1,b1)] = [(a,b)]$$

و

$$[(1,1)][(a,b)] = [(1a,1b)] = [(a,b)]$$

پس $(Q, \cdot)$ عنصر همانی دارد.

(ح) فرض کنیم $[(a,b)] \in Q - \{[(0,1)]\}$. در اینصورت $[(a,b)] \neq [(0,1)]$ و در نتیجه بنابه ۲۲-۱-۴، $(a,b) \nsim (0,1)$. پس $a1 \neq b0$ و در نتیجه $a \neq 0$. در اینصورت $[(b,a)] \in Q - \{[(0,1)]\}$.
نشان می‌دهیم که $[(b,a)]$ معکوس $[(a,b)]$ نسبت به عمل ضرب است.

$$[(a,b)][(b,a)] = [(ab,ba)] = [(ab,ab)]$$

حال چون $(ab)1 = (ab)1$، پس $(ab,ab) \sim (1,1)$ و در نتیجه بنا به ۲۲-۱-۴، $[(ab,ab)] = [(1,1)]$. بنابراین :

$$[(a,b)][(b,a)] = [(1,1)]$$

بطریق مشابه $[(b,a)][(a,b)] = [(1,1)]$. پس $[(b,a)]$ معکوس $[(a,b)]$ نسبت به عمل ضرب است.

<u>۶-۳-۷ : تمرین :</u> فرض کنید $[(a,b)] \in Q$. نشان دهید که :

(الف) $[(a,b)] = [(0,1)] \iff a = 0$

(ب) $[(a,b)] = [(1,1)] \iff a \neq 0 \wedge a = b$

(ج) $[(-a,b)] = [(a,-b)] = -[(a,b)]$

(د) $\qquad [(-\alpha , -b)] = [(\alpha , b)]$

(هـ) عناصر $c \in \mathbb{Z}$ و $d \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارند بطوریکه $[(\alpha , b)] = [(c , d)]$ •

تذکـــر: از ۶-۳-۷ (هـ) نتیجه می‌شود که $\mathbb{Q}$ رامی‌توان بصورت زیر درنظر گرفت :

$$\mathbb{Q} = \{ [(\alpha , b)] \mid \alpha \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^+ \}$$

۷-۳-۷ : تعریف :

با استفاده از تذکر فوق فرض کنیم $[(\alpha , b)]$ یک عنصر دلخواه $\mathbb{Q}$ باشد بطوریکه $b \in \mathbb{Z}^+$ • در اینصورت زیر مجموعه $\mathbb{Q}^+$ از $\mathbb{Q}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[(\alpha , b)] \in \mathbb{Q}^+ \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}^+$$

بعبارت دیگر $\mathbb{Q}$ مجموعه عناصر $[(\alpha , b)]$ از $\mathbb{Q}$ با $b \in \mathbb{Z}^+$ است ، بطوریکه داشته باشیم $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ •

۸-۳-۷ : مثال :

بنا به ۸-۲-۷، در $\mathbb{Z}$ داریم $1 \in \mathbb{Z}^+$، پس $[(1 , 1)] \in \mathbb{Q}^+$ • عنصر $[(1 , -1)]$ در $\mathbb{Q}$ را درنظر می‌گیریم • بنابه ۶-۳-۷ (ب) ، $[(1 , -1)] = [(-1 , 1)]$ ، که در آن $1 \in \mathbb{Z}^+$. حال چون $-1 \notin \mathbb{Z}^+$ ، پس $[(-1 , 1)]$ و در نتیجه $[(1 , -1)]$ به $\mathbb{Q}^+$ تعلق ندارد • عنصر $[(-1 , -\sigma(1))]$ در $\mathbb{Q}$ را درنظر می‌گیریم • بنابه ۶-۳-۷ (د)، $[(-1 , -\sigma(1))] = [(1 , \sigma(1))]$ که درآن $\sigma(1) \in \mathbb{Z}^+$ • حال چون $1 \in \mathbb{Z}^+$ ، پس $[(1 , \sigma(1))]$ و در نتیجه $[(-1 , -\sigma(1))]$ در $\mathbb{Q}^+$ قرار دارد •

۹-۳-۷ : قضیه : با درنظر گرفتن زیر مجموعه $\mathbb{Q}^+$ از $\mathbb{Q}$ ، $(\mathbb{Q} ; + , \cdot)$ یک هیات مرتب است •

اثبات : بنابه ۵-۳-۷، $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ یک هیات است • باید نشان دهیم که :

(الف) $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow [(a,b)]+[(c,d)] \in \mathbb{Q}^+ \wedge [(a,b)][(c,d)] \in \mathbb{Q}^+$

(ب) برای هر $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است :

$$[(a,b)]=[(0,1)] \vee [(a,b)] \in \mathbb{Q}^+ \vee -[(a,b)] \in \mathbb{Q}^+$$

بندهای (الف) و (ب) را در زیر اثبات می‌کنیم •

(الف) چون $[(a,b)]$ و $[(c,d)]$ هردو در $\mathbb{Q}^+$ هستند، پس a، b، c و d در $\mathbb{Z}^+$ قراردارند • چون $\mathbb{Z}^+$ تحت اعمال جمع و ضرب روی $\mathbb{Z}$ بسته است پس داریم :

$$ad+bc \in \mathbb{Z}^+, \; bd \in \mathbb{Z}^+, \; ac \in \mathbb{Z}^+$$

بنابراین $[(ad+bc, bd)] \in \mathbb{Q}^+$ و $[(ac, bd)] \in \mathbb{Q}^+$ • پس $\mathbb{Q}^+$ تحت اعمال جمع و ضرب روی $\mathbb{Q}$ بسته است•

(ب) با استفاده از تذکر بعد از ۶-۳-۷، می‌توان فرض کرد که $b \in \mathbb{Z}^+$ • فرض کنیم $[(a,b)] \neq [(0,1)]$ • در اینصورت بنابه ۶-۳-۷، $a \neq 0$ پس بنابه ۹-۲-۷، $a \in \mathbb{Z}^+$ یا $-a \in \mathbb{Z}^+$ • اگر $a \in \mathbb{Z}^+$، آنگاه $[(a,b)] \in \mathbb{Q}^+$.

اگر $-a \in \mathbb{Z}^+$ آنگاه $[(-a,b)] \in \mathbb{Q}^+$ و در نتیجه بنابه ۶-۳-۷ (ج ا، $-[(a,b)] \in \mathbb{Q}^+$ •

پس برای هر $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ یکی از حالات زیر برقرار است :

$$[(a,b)]=[(0,1)] \vee [(a,b)] \in \mathbb{Q}^+ \vee -[(a,b)] \in \mathbb{Q}^+$$

بعلاوه چون برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ، دقیقاً یکی از حالات $a=0$ یا $a \in \mathbb{Z}^+$ یا $-a \in \mathbb{Z}^+$ برقرار است، پس نتیجه می‌شود که برای $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ نیز دقیقاً یکی از حالات فوق برقرار است • بنابراین $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ یک هیات مرتب است•

۱۰-۳-۷ : تعریف : رابطه $<$ روی $\mathbb{Q}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[(a,b)]<[(c,d)] \Longleftrightarrow [(c,d)]+[(-a,b)] \in \mathbb{Q}^+$$

بعبارت دیگر :

$$[(a,b)] < [(c,d)] \Longleftrightarrow bc - ad, bd \in \mathbb{Z}^+$$

۷-۳-۱۱ : نتیجه :

رابطه < روی $\mathbb{Q}$ تعریف شده در ۷-۳-۱۰ یک رابطه ترتیبی جزیی اکید است .

اثبات : از ۶-۲-۵۲ نتیجه می‌شود .

تذکر :

اگر رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{Q}$ را طبق معمول بصورت زیر تعریف کنیم ، آنگاه بنا به ۴-۳-۳۵ یک رابطه ترتیبی خطی است .

$$[(a,b)] \leqslant [(c,d)] \Longleftrightarrow [(a,b)] = [(c,d)] \vee [(a,b)] < [(c,d)]$$

۷-۳-۱۲ : تعریف : مجموعه $\mathbb{Q}$ ، مجموعه اعداد گویا نامیده می‌شود .

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که حلقه یکانی و جابجایی مرتب $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ را می‌توان در هیات مرتب $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ محاط کرد .

۷-۳-۱۳ : قضیه :

تابع $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ، بطوریکه $f(a) = [(a,1)]$ برای هر $a \in \mathbb{Z}$ یک همریختی یک بیک از حلقه یکانی وجابجایی مرتب $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ به هیات مرتب $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ است .

اثبات :

نشان می دهیم که f یک بیک است . فرض کنیم $f(a) = f(b)$. در اینصورت $[(a,1)] = [(b,1)]$ و در نتیجه بنا به ۴-۱-۲۲ ، $(a,1) \sim (b,1)$. پس $a1 = 1b$ و در نتیجه $a = b$ بنابراین f یک بیک است . فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$ ، در اینصورت داریم :

$$f(a+b) = [(a+b,1)] = [(a,1)] + [(b,1)] = f(a) + f(b)$$

و $f(\alpha b)=[(\alpha b,1)]=[(\alpha,1)][(b,1)]=f(\alpha)f(b)$

اگر $\alpha=b$ ، آنگاه روشن است که $f(\alpha)=f(b)$. فرض کنیم $\alpha<b$. دراینصورت

$b-\alpha=|b-\alpha|\in\mathbb{Z}^{+}$ و $1\cdot 1=1\in\mathbb{Z}^{+}$ و درنتیجه $[(\alpha,1)]<[(b,1)]$.

پس با فرض $\alpha\leqslant b$ ، نتیجه می‌شود که $f(\alpha)\leqslant f(b)$. بنابراین f یک همریختی یک بیک از حلقه یکانی و جابجایی مرتب $(\mathbb{Z}\,;+\,,\cdot)$ به هیات مرتب $(\mathbb{Q}\,;+\,,\cdot)$ است.

<u>تذکر</u>: تابع $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Q}$ درقضیه فوق را درنظر می‌گیریم. دراینصورت داریم:

$$f[\mathbb{Z}]=\{[(\alpha,1)]\mid\alpha\in\mathbb{Z}\}$$

ازقضیه فوق نتیجه می‌شود که $(\mathbb{Z}\,;+\,,\cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ با $(f[\mathbb{Z}]\,;+\,,\cdot)$ با رابطه ترتیبی $\leqslant$ یکریخت است. بنابراین اگر $\mathbb{Z}$ را با $f[\mathbb{Z}]$ یکسان فرض کنیم، می‌توان فرض کرد که $\mathbb{Z}$ درداخل $\mathbb{Q}$ قراردارد. بااین فرض عنصر $[(\alpha,1)]$ در $\mathbb{Q}$ را با $\alpha\in\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم.

عنصر $[(\alpha,b)]\in\mathbb{Q}$ رابانماد α/b که نمایش یک کسر باصورت α و مخرج b می‌باشد، نشان داده می‌شود و همانطوریکه دربالا گفتیم $\alpha=\alpha/1$ برای هر $\alpha\in\mathbb{Z}$. دراینجا ملاحظه می‌شود که اگر $x=\alpha/b$ یک عنصر $\mathbb{Q}$ باشد و $x\neq 0$ ، آنگاه $x^{-1}=b/\alpha$. همچنین می‌نویسیم $x^{-1}=1/x$.

<u>۱۴-۳-۷ : تمرین :</u> فرض کنید $x,y,z\in\mathbb{Q}$. نشان دهید که :

(الف) $x+z=y+z\Longrightarrow x=y$

(ب) $xz=yz\wedge z\neq 0\Longrightarrow x=y$

(ج) $x<y\Longleftrightarrow x+z<y+z$.

(هـ) $x<y\wedge z>0\Longrightarrow xz<yz$.

<u>۱۵-۳-۷ : تمرین :</u> فرض کنید $x,x',y,y'\in\mathbb{Q}$. نشان دهید که :

الف) $x < x' \wedge y < y' \Longrightarrow x+y < x'+y'$

ب) $0 \leqslant x < x' \; 0 \leqslant y < y' \Longrightarrow 0 \leqslant xy < x'y'$

۷-۳-۱۶ : تمرین :

نشان دهید که بین هردو عدد گویا یك عدد گویا قرار دارد ، بعبارت دیگرنشان دهید که برای هر $x, z \in \mathbb{Q}$ داریم :

$$x < z \Longrightarrow \exists y (y \in \mathbb{Q} \wedge x < y < z)$$

۷-۴ : اعـداد حقیقی

در قسمت قبل دیدیم که $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ یك هیات مرتب است ۰ ولی همانطوریکه در ۷-۳-۵-۶ (ب) ، گفته شد ، یك هیات مرتب کامل نیست ۰ همچنین درفصل اول دیدیم که نسبت ضلع یك مربع به قطر آن یك عدد گویا نیست ۰ یا معادله $x^2-2=0$ در $\mathbb{Q}$ جواب ندارد ۰ بنابراین نیاز به بسط $\mathbb{Q}$ به مجموعه کامل تری از اعداد مشاهده می‌شود ۰ در این قسمت به انجام اینکار می‌پردازیم و با استفاده از مجموعه اعداد گویـا ، مجموعه اعداد حقیقی‌را می‌سازیم ۰ متاسفانه روش ساختن اعداد حقیقی از اعداد گویـا به سادگی روشهای ساختن $\mathbb{Z}$ از $\mathbb{N}$ یا ساختن $\mathbb{Q}$ از $\mathbb{Z}$ نیست و روش‌کاربمقـدار قابل ملاحظه ای پیچیده تر می‌باشد ۰ البته روشهای مختلف برای ساختن اعداد حقیقی از اعداد گویا وجود داردو در اینجا یکی از این‌روشها را ارائه می‌دهیم ۰

۷-۴-۱ : تعریف: زیر مجموعه α از $\mathbb{Q}$ یك برش ددکیند نامیده می‌شوداگـــر داشته باشیـم :

(الف) $\alpha \neq \phi$ ؛

(ب) $\alpha \neq \mathbb{Q}$ ؛

(ج) α از پائین بسته باشد ؛ بدین معنی که اگر $x \in \alpha$ و $y < x$ ، آنگاه $y \in \alpha$ ؛

(د) α بزرگترین عنصر نداشته باشد ؛ بعبارت دیگر برای هر $x \in \alpha$ ، وجود داشته باشد $y \in \alpha$ بطوریکه $y > x$ ۰

۲-٤-۷ : مثال :

(الف) زیر مجموعه $\alpha=\{x \mid x\in \mathbb{Q} \wedge x<0\}$ از $\mathbb{Q}$ یک برش «ددکیند» است • زیرا که $\alpha\neq\phi$ ، مثلاً $-1\in\alpha$ و $\alpha\neq\mathbb{Q}$ ، مثلاً $1\notin\alpha$ اگر $x\in\alpha$ و $y<x$ ، آنگاه $y<x<0$ و در نتیجه $y<0$ و $y\in x$ • همچنین اگر $x\in\alpha$ ، آنگاه $x<0$ وبنابه ۷-۲-۱٦، $y\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $x<y<0$. بنابراین $y\in\alpha$ و α بزرگترین عنصر ندارد • پس α یک برش «ددکیند» است •

(ب) مانند بند (الف) می‌توان نشان داد که $v=\{x/x\in\mathbb{Q}\wedge x<1\}$ یک برش «ددکیند» است•

۳-٤-۷ : تعریف :

مجموعه همه برشهای «ددکیند» را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم • هر برش «ددکیند» را یک عدد حقیقی می‌نامیم و در نتیجه $\mathbb{R}$ مجموعه همه اعداد حقیقی است•

تذکـــر:

در ادامه این قسمت میخواهیم دو عمل جمع و ضرب و یک رابطه ترتیبی روی $\mathbb{R}$ تعریف کنیم و سپس نشان دهیم که $(\mathbb{R}\,;+\,,\cdot)$ یک هیات مرتب است • همچنین نشان می‌دهیم که $\mathbb{R}$ در تعریف ٦-۲-٥٦ صدق می‌کند و در نتیجه یک هیات مرتب کامـــل می‌باشد • در قسمت های ۲و۳ این فصل برای تعریف روابط ترتیبی روی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ ابتدا $\mathbb{Z}^+$ و $\mathbb{Q}^+$ را تعریف کردیم و سپس روابط ترتیبی روی آنها را معرفی نمودیم•در اینجا برعکس عمل می‌کنیم •ابتدا رابطه ترتیبی راروی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم و سپس $\mathbb{R}^+$ را مشخص می‌نمائیم • علت اینکار این است که رابطه ترتیبی روی $\mathbb{R}$ بسهولت قابل تعریف است •

٤-٤-۷ : تعریف : رابطه $<$ را روی $\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\alpha<\gamma \Longleftrightarrow \alpha\subset\gamma$$

در اینجا یادآوری می‌کنیم که منظور از $u \subset v$ یعنی $u \subseteq v$ و $u \neq v$ •

<u>۷-٤-٥ : مثال :</u>

اگر u و v بترتیب اعداد حقیقی در بندهای (الف) و (ب) , ۷-٤-۲ باشند آنگاه $u < v$ • زیرا که روشن است $u \subset v$ •

<u>۷-٤-٦ : قضیه :</u> رابطه $<$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده در ۷-٤-٤ یك رابطه ترتیبی خطی اکید است •

<u>اثبات :</u>

فرض کنیم $u, v, w \in \mathbb{R}$ و $u < v$ و $v < w$ • در اینصورت $u \subset v$ و $v \subset w$ و در نتیجه $u \subset w$ • پس $u < w$ و در نتیجه $<$ انتقالی است • حال فرض کنیم $u, v \in \mathbb{R}$ • میخواهیم نشان دهیم که دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است

$$u = v \ \vee \ u \subset v \ \vee \ v \subset u$$

روشن است که حداکثر فقط یکی از حالات فوق می‌تواند برقرار باشد • نشان بدهیم که حداقل یکی برقرار است • فرض کنیم که دو حالت سمت چپ برقرار نباشند , یعنی $u \nsubseteq v$ • نشان می‌دهیم که حالت سوم , یعنی $v \subset u$ برقرار است • چون $u \nsubseteq v$, پس $x \in u$ وجود داردبطوریکه $x \notin v$ • فرض کنیم y یك عنصر دلخواه در v باشد • اگر $x \leqslant y$, آنگاه بنابه ۷-٤-۱ (ج), $x \in v$ که یك تناقض به $x \notin v$ می‌باشد • پس $x \nleqslant y$ و در نتیجه بنابه ۷-۳-۱۱, $y < x$ • چون $x \in u$, پس بنا به ۷-٤-۱ (ج), $y \in u$ • پس $v \subset u$ • بنابراین برای هر $u, v \in \mathbb{R}$ دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است :

$$u = v \ \vee \ u < v \ \vee \ v < u$$

پس $<$ یك رابطه ترتیبی خطی اکید روی $\mathbb{R}$ است •

<u>تذکر:</u>

حال پس از تعریف رابطه $<$ روی $\mathbb{R}$ می‌توان طبق معمول روابط $\leqslant$ ، $>$ و

$\leqslant$ را روی $\mathbb{R}$ تعریف کرد • ولی در اینجا این روابط را می‌توان بصورت زیر بیان نمود :

$$u \leqslant v \Longleftrightarrow u \subseteq v$$

$$u < v \Longleftrightarrow v \subset u$$

$$u \geqslant v \Longleftrightarrow v \subseteq u$$

<u>۷-۴-۷ : نتیجه :</u> رابطه $\leqslant$ روی $\mathbb{R}$ یك رابطه ترتیب خطی است •

<u>اثبات :</u> از ۳ ۵-۲-٦ نتیجه می‌شود •

<u>۷-٤-۸ : قضیه :</u>

مجموعه $\mathbb{R}$ و رابطه ترتیب خطی $\leqslant$ روی $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم • دراینصورت هر زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{R}$ که دارای کران بالا ست ، دارای کوچکترین کران بـــا لا می‌باشـــد •

<u>اثبات :</u>

فرض کنیم که A یك زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{R}$ با یك کران بالا باشد • نشـــان می‌دهیم که $\sup A$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد • فرض کنیم :

$$v = \bigcup A = \{x / \exists u (u \in A \wedge x \in u)\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $v \in \mathbb{R}$ • چون $A \neq \phi$ ، پس روشن است که $v \neq \phi$ •
چون A دارای کران بالاست ، پس $w \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه $u \leqslant w$ برای هر پس برای هر $u \in A$ ~~$u \in A$~~ داریم $u \subseteq w$ ودر نتیجه $v = \bigcup A \subseteq w$ • چون $w \in \mathbb{R}$ ، پس $w \neq \mathbb{Q}$ ودر نتیجه $v \neq \mathbb{Q}$ • فرض کنیم $x \in v$ و $y < x$ • در اینصورت $u \in A$ وجود دارد بطوریکه $x \in u$ و $y < x$ • چون $u \in \mathbb{R}$ ، پس $y \in u$ ودر نتیجه $y \in \bigcup A = v$ • پس v از پایین بسته است •
حال فرض می‌کنیم $x \in v$ • در اینصورت $u \in A$ وجود دارد بطوریکه $x \in u$ • چون $u \in \mathbb{R}$ ، پس u بزرگترین عنصر ندارد ودر نتیجه $y \in u$ وجود دارد بطوریکه $x < y$ • چون $y \in u$ ، پس $y \in \bigcup A = v$. بنابراین v بزرگترین عنصر ندارد • پس $v \in \mathbb{R}$ •

حال نشان می‌دهیم که $v = sup\ A$ • چون برای هر $u \in A$ ، $u \subseteq \bigcup A = v$ ،
پس برای هر $u \in A$ داریم $u \leqslant v$ و در نتیجه v یك کران بالا برای A است•
فرض کنیم که w یك کران بالای دلخواه برای A باشد • دراینصورت برای هر $u \in A$
داریم $u \leqslant w$ و در نتیجه $u \subseteq w$ • پس $v = \bigcup A \subseteq w$ و در نتیجه $v \leqslant w$.
بنابراین $v = sup A$ •

<u>۹-٤-۷ : تعریف:</u> عمل جمع روی $\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$u + v = \{z \mid \exists x, y(x \in u \wedge y \in v \wedge z = x + y)\}$$

بعبارت دیگر :

$$u + v = \{x+y \mid x \in u \wedge y \in v\}$$

<u>۱۰-٤-۷ : قضیه :</u> برای هر $u, v \in \mathbb{R}$ ، داریم $u+v \in \mathbb{R}$ •

<u>اثبات :</u>

چون $u \neq \phi$ و $v \neq \phi$ ، پس $u+v \neq \phi$ • نشان می‌دهیم
$u + v \neq \mathbb{Q}$ • چون $u \neq \mathbb{Q}$ و $v \neq \mathbb{Q}$ • پس اعداد گویای x' و y' وجود
دارند بطوریکه $x' \in \mathbb{Q} - u$ ، $y' \in \mathbb{Q} - v$ • در اینصورت برای هر $x \in u$ و
$y \in v$ ، داریم $x < x'$ و $y < y'$ ، زیرا که اگر $x' \leqslant x$ و $y' \leqslant y$،
آنگاه بنابه ۱-٤-۷ (ج) ، $x' \in u$ و $y' \in v$ که تناقض است • پس $x < x'$
و $y < y'$ • در اینصورت بنابه ۱۵-۳-۷ (الف) ، $x+y < x' + y'$ •بنابراین
برای هر $z \in u + v$ ، داریم $z < x' + y'$ و در نتیجه $x'+y' \notin u + v$ •پس
$u + v \neq \mathbb{Q}$ • نشان می‌دهیم $u + v$ از پائین بسته است• فرض کنیم
$x + y \in u + v$ و $z < x + y$ • در اینصورت بنابه ۱٤-۳-۷ (ج)
$z + (-y) < x + y + (-y)$ و در نتیجه $z - y < x$ ، زیراکه $y + (-y) = 0$ •
پس بنابه ۱-٤-۷ (ج) ، $z - y \in u$ • حال چون $z = (z-y) + y$ و $z - y \in u$

و $y \in v$ ، پس $z \in u + v$ • بنابراین $u+v$ از پائین بسته است • حال نشان می‌دهیم که $u+v$ بزرگترین عنصر ندارد • فرض کنیم $x+y \in u+v$ ، که در آن $x \in u$ و $y \in v$ • چون u و v بزرگترین عنصر ندارند ، پس $x' \in u$ و $y' \in v$ وجود دارند پس $x < x'$ و $y < y'$ • پس بنابه ۷-۳-۱۵ (الف) ، $x+y < x'+y'$ • چون $x'+y' \in u+v$ ، پس $u+v$ بزرگترین عنصر ندارد • بنابراین $u+v \in \mathbb{R}$•

<u>تذکر:</u>

میخواهیم نشان دهیم که $(\mathbb{R} ; +)$ یك گروه آبلی است• بعلت طولانی بودن اثبات ، تحقیق اصول یك گروه آبلی در مورد $(\mathbb{R} ; +)$ رابه قضایای زیر تفکیك‌می‌کنیم •

<u>۷-٤-۱۱ : قضیه :</u>

(الف) عمل جمع روی $\mathbb{R}$ شرکت پذیر است •

(ب) عمل جمع روی $\mathbb{R}$ جابجایی‌است •

<u>اثبات :</u>

(الف) فرض کنیم $u, v, w \in \mathbb{R}$ • در اینصورت بنابه ۷-٤-۹ داریم :

$$(u+v)+w=\{x'+z \mid x' \in u+v \wedge z \in w\}$$

چون $x' \in u+v$ ، پس $x' = x+y$ ، برای $x \in u$ و $y \in v$ •بنابراین داریم :

$$(u+v)+w=\{(x+y)+z \mid x \in u \wedge y \in v \wedge z \in w\}$$

بنابه ۷-۳-۵ (الف)، $(x+y)+z=x+(y+z)$ و در نتیجه داریم :

$$(u+v)+w=\{x+(y+z) \mid x \in u \wedge y+z \in v+w\}$$
$$=u+(v+w)$$

پس جمع شرکت پذیر است •

(ب) اثبات این بند را بعنوان تمرین بنویسید •

<u>۱۲-٤-۷ : تعریف :</u> تعریف می کنیم :

$$0 = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 0 \right\}$$

در ۲-٤-۷ (الف) ، نشان دادیم که $0 \in \mathbb{R}$ • درقضیه زیر نشان می دهیم که 0 عنصر صفر $(\mathbb{R};+)$ است •

<u>۱۳-٤-۷ : قضیه :</u>

اگر 0 عدد حقیقی تعریف شده در ۱۲-٤-۷ باشد ، آنگاه 0 عنصر صفر $(\mathbb{R};+)$ است •

<u>اثبات :</u>

برای هر $u \in \mathbb{R}$ ، نشان می دهیم که $u + 0 = u$ • فرض کنیم $x + y \in u + 0$ در اینصورت $x \in u$ و $y \in 0$ • در اینصورت $x \in \mathbb{Q}$ و $y < 0$ • بنابه ۱٤-۳-۷ (ج) ، $x+y < x+0$ و در نتیجه $x+y<x$ • پس بنابه ۱-٤-۷(ج) $x+y \in u$ • حال فرض کنیم $x \in u$ • چون u بزرگترین عنصر ندارد ، پس $y \in u$ وجود دارد بطوریکه $x < y$ • در اینصورت با استفاده از ۱٤-۳-۷ (ج) ، داریم $x - y < 0$ و در نتیجه $x - y \in 0$ • چون $x = y + (x - y)$ و $y \in u$ و $x - y \in 0$ ، پس $x \in u + 0$ بنابراین $u + 0 = u$ • بنابه ۱۱-٤-۷(ب) ، + جابجایی است و در نتیجه $u = u + 0 = 0 + u$ • پس 0 عنصر همانی $(\mathbb{R};+)$ می باشد •

<u>تذکـــر:</u>

تنها اصل باقیمانده از اصول یک گروه آبلی اصل (ج) در ۱۷-۲-٦ است کـه باید در مورد $(\mathbb{R};+)$ تحقیق شود • یعنی باید نشان دهیم که برای هر $u \in \mathbb{R}$ ، $-u$

در $\mathbb{R}$ وجود دارد ۰اگر عدد حقیقی u' معکوس u نسبتبه عمل + باشد ، آنگاه بایـد داشته باشیم :

$$u + u' = \{x + x' \mid x \in u \wedge x' \in u'\} = 0$$

پس با استفاده از ۱۲-٤-۷ و ۱٤-۳-۷ (ج)، برای هر $x' \in u'$ باید داشته باشیم :

$$\forall x (x \in u \Longrightarrow x + x' \in 0) \Longrightarrow \forall x (x \in u \Longrightarrow x + x' < 0)$$

$$\Longrightarrow \forall x (x \in u \Longrightarrow x' < -x)$$

بنابراین بنظر میآیدکه اگر تعریف کنیم $u' = \{x' \mid x' \in \mathbb{Q} \wedge -x' \notin u\}$، آنگـاه u' معکوس u نسبت به عمل + است • زیراکه دراینصورت ، برای هر $x \in u$ ، خواهیم داشت $x < -x'$ و در نتیجه $x' < -x$. ولی این تعریف کاملاً درست نیست، زیراممکن است u' یك عدد حقیقی نباشد •تعریف درست $-u$ بصورت زیر است :

<u>۱٤-٤-۷ : تعریف :</u> برای هر $u \in \mathbb{R}$ ، تعریف میکنیم :

$$-u = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge \exists y (y \in \mathbb{Q} \wedge x < y \wedge -y \notin u)\}$$

در زیر نشان میدهیم که $-u$ یك عدد حقیقی است و معکوس u نسبت به عمل + میباشد. قبل از اثبات این مطلب ابتدا قضیه کمکی زیر را اثبات میکنیم • در اینجا با توجه بـه بحث های قسمتهای قبل در این فصل ، فرض میکنیم که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

<u>۱۵-٤-۷ : قضیه :</u>

(الف) فرض کنیم a یك عدد صحیح باشد بطوریکه $a > 0$ • دراینصورت برای هر عدد صحیح b، عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه $b < na$.

(ب) فرض کنیم x یك عدد گویا باشد بطوریکه $x > 0$ • دراینصورت برای هرعدد گویای y ، عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه $y < nx$.

(ج) فرض کنیم x یك عدد گویا باشد بطوریکه $x > 0$ • دراینصورت برای هر عدد حقیقی u ، عدد گویای $y \in u$ وجود دارد بطوریکه $x + y \notin u$.

<u>اثبـات :</u>

(الف) فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ وجود نداشته باشد بطوریکه $b < na$ • پس برای هـر

$n\in\mathbb{N}$ ، داریم $na\leqslant b$ • چون $\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+$ و $a\in\mathbb{Z}^+$ ، پس $a\in\mathbb{N}$ و در نتیجه $na\in\mathbb{N}$ • همچنین چون $b\in\mathbb{Z}$ و $b\geqslant na>0$ پس $b\in\mathbb{Z}^+$ و در نتیجه $b\in\mathbb{N}$ • بعلاوه برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، داریم $n<na$ • پس نتیجه می‌شود که برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، داریم $n<b$ و در نتیجه b بزرگترین عنصر $\mathbb{N}$ است که یک تناقض می‌باشد • زیرا که $b+1\in\mathbb{N}$ و $b<b+1$ • بنابراین $n\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد بطوریکه $b<na$ •

(ب) فرض کنیم $x=a/b$ و $y=c/d$ ، که درآن $a,b,d\in\mathbb{Z}^+$ و $c\in\mathbb{Z}$ • در اینصورت $ad\in\mathbb{Z}^+$ و $bc\in\mathbb{Z}$ • بنابه بند (الف)، $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $bc<nad$ و در نتیجه $c/d<n(a/b)$ ، یعنی $y<nx$ •

(ج) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، داشته باشیم $nx\in u$ ، آنگاه $u=\mathbb{Q}$ • زیرا که بنابه بند (ب) برای هر $z\in\mathbb{Q}$ وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ بطوریکه $z<nx$ و چون $nx\in u$ ، پس بنا به ۱-٤-۷ (ج)، $z\in u$ و در نتیجه $u=\mathbb{Q}$ که این یک تناقض است • بنابراین $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $nx\in u$ و $(n+1)x\notin u$ • پس اگر $y=(n+1)x-x=nx$ ، آنگاه $y\in u$ و $x+y\notin u$ •

<u>۷-٤-۱٦ : قضیه :</u> فرض کنیم $u\in\mathbb{R}$ • در اینصورت داریم :

(الف) $-u\in\mathbb{R}$

(ب) $u+(-u)=(-u)+u=0$

<u>اثبات :</u>

(الف) نشان می‌دهیم $-u\neq\Phi$ • چون $u\neq\mathbb{Q}$ ، پس $x\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $x\notin u$ • فرض کنیم $y=-x-1$ • پس با استفاده از ۷-۳-۱٤ (ج)، $-x<y$ • چون $x=-(-x)\notin u$ ، پس بنابه ۷-٤-۱٤، $y\in -u$ و در نتیجه $-u\neq\mathbb{Q}$ • نشان می‌دهیم $u\neq\Phi$ • چون $u\neq\Phi$ ، پس $x\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $x\in u$. اگر $-x\in -u$ ، آنگاه بنابه ۷-٤-۱٤، $y\in\mathbb{Q}$

وجود دارد بطوریکه $x<y$ و $-y \notin u$. در اینصورت $-y<x$. و چون $x \in u$ ، پس بنا به ۱ـ۴ـ۷(ج)، $-y \in u$ که یك تناقض است . پس $-x \notin u$ و در نتیجه $-u \neq \phi$. نشان می دهیم که $-u$ از پایین بسته است . فرض کنیم $x \in -u$ و $y<x$. در اینصورت بنا به ۱۴ـ۴ـ۷، $z \in \phi$ وجود دارد بطوریکه $x<z$ و $-z \notin u$. و $y<x$. پس $y<z$ و $-z \notin u$ و در نتیجه بنا به ۱۴ـ۴ـ۷ $y \in u$. پس u از پایین بسته است .
حال نشان می دهیم که $-u$ بزرگترین عنصر ندارد . فرض کنیم $x \in -u$. در اینصورت بنا به ۱۴ـ۴ـ۷ ، $y \in \phi$ وجود دارد بطوریکه $x<y$ و $-y \notin u$. بنا به ۱۶ـ۳ـ۷، $z \in \phi$ وجود دارد بطوریکه $x<z<y$. پس بنا به ۱۴ـ۴ـ۷ $z \in -u$ و $z>x$. بنابراین $-u$ بزرگترین عنصر ندارد . پس $-u \in \mathbb{R}$.

(ب) نشان می دهیم $u+(-u)=0$. فرض کنیم $x+y \in u+(-u)$ ، که در آن $x \in u$ و $y \in -u$. در اینصورت بنا به ۱۴ـ۴ـ۷، $z \in \phi$ وجود دارد بطوریکه $y<z$ و $-z \notin u$. اگر $x \geqslant -z$ ، آنگاه چون $x \in u$ ، پس بنا به ۱ـ۴ـ۷(ج)، $-z \in u$ که یك تناقض است . پس $x<-z$ و $y<z$ و در نتیجه بنا به ۱۵ـ۳ـ۷(الف)، $x+y<(-z)+z$ ، یعنی $x+y<0$. بنابراین $x+y \in 0$. حال فرض کنیم $x \in 0$. در اینصورت $x<0$ و در نتیجه $-x>0$. پس بنا به ۱۴ـ۳ـ۷(ه)، $\frac{-x}{2}>0$. بنا به ۱۵ـ۴ـ۷(ج)، $y \in u$ وجود دارد بطوریکه $y+(\frac{-x}{2}) \notin u$. فرض کنیم $z=\frac{x}{2}-y$. در اینصورت $-z \notin u$. چون $x<0$ ، پس $x<\frac{x}{2}$ و در نتیجه بنا به ۱۴ـ۳ـ۷(ج)، $x-y<\frac{x}{2}-y$ پس $x-y<z$ و $-z \notin u$. بنابراین $x-y \in -u$ و در نتیجه $x=y+(x-y) \in u+(-u)$. پس $u+(-u)=0$. چون + جابجایی است ، پس $(-u)+u=0$. بنابراین $-u$ معکوس u نسبت به عمل + است .

<u>۱۷ـ۴ـ۷ نتیجه :</u> $(\mathbb{R},+)$ یك گروه آبلی است .

<u>اثبات :</u> از ۱۱ـ۴ـ۷ ، ۱۳ـ۴ـ۷ و ۱۵ـ۴ـ۷ نتیجه می شود .

<u>تذکر :</u>

در این مرحله می خواهیم یك عمل ضرب روی $\mathbb{R}$ تعریف کنیم و سپس خواص آنرا بررسی

نمائیم • برای اینکار ابتدا ضرب دو عدد حقیقی u و v را بطوریکه $u>0$ و $v>0$ تعریف می‌کنیم و سپس آنرا برای هر دو عدد حقیقی تعمیم می‌دهیم •

<u>۷-٤-۱۸ : تعریف :</u> فرض کنیم $u, v \in R$ بطوریکه $u>0$ و $v>0$ • دراینصورت تعریف می کنیم :

$$uv = \{z \mid z \in Q \wedge (z \leqslant 0 \vee \exists x, y (x \in u \wedge y \in v \wedge x>0 \wedge y>0 \wedge z = xy))\}$$

<u>۷-٤-۱۹ : قضیه :</u>

اگر u و v دو عدد حقیقی باشند بطوریکه $u>0$ ، $v>0$ ، آنگـــــاه uv یک عدد حقیقی است •

<u>اثبــات :</u>

نشان می‌دهیم که $uv \neq \phi$ • اگر برای هر $x \in u$ داشته باشیم $x<0$ ، آنگاه $u \leqslant 0$ که یک تناقض است • پس $x \in u$ وجود دارد بطوریکه $x \geqslant 0$ • بدلیل مشابه $y \in v$ وجود دارد بطوریکه $y \geqslant 0$ اگر $x = 0$ یا $y = 0$ آنگاه $z = xy = 0$ و در نتیجه $z \in uv$ • اگر $x>0$ و $y>0$ ، آنگاه $z = xy \in uv$ • پس $uv \neq \phi$ • نشان می‌دهیم که $uv \neq Q$.چون $u \neq Q$ و $v \neq Q$ ، پس $x, y \in Q$ وجود دارند بطوریکه $x \notin u$ و $y \notin v$. در اینصورت $x > x'$ برای هر $x' \in u$ و $y > y'$ برای هر $y' \in v$ • چون $u>0$ و $v>0$ پس $x'' \in u$ و $y'' \in v$ وجود دارند بطوریکه $x'' \geqslant 0$ و $y'' \geqslant 0$. بنابراین $x>0$ و $y>0$ و در نتیجه $xy>0$ • حال اگر $xy \in uv$ ، آنگاه باید $x' \in u$ و $y' \in v$ وجود داشته باشند بطوریکه $x'>0$ و $y'>0$ و $xy = x'y'$ که یک تناقض است، زیرا که $xy > x'y'$ • پس $xy \notin uv$ و در نتیجه $uv \neq Q$ • نشان می‌دهیم که uv از پائین بسته است • فرض کنیم $z \in uv$ و $z' < z$ • اگر $z' \leqslant 0$ ، آنگاه بنابه ۱۸-٤-۷، $z' \in uv$. فرض کنیم $z'>0$ • دراینصورت $z>0$ و در نتیجه $x \in u$ و $y \in v$

وجود دارند بطوریکه $x>0$ ، $y>0$ و $z=xy$ •
حال داریم :

$$z'=\frac{z'z}{z}=\frac{z'xy}{z}=\left(\frac{z'}{z}x\right)y$$

چون $0<z'<z$ ، پس $1>\frac{z'}{z}$ و در نتیجه $x>\left(\frac{z'}{z}\right)x$ که نتیجه می‌دهد $\left(\frac{z'}{z}\right)x\in u$ • بنابراین $z'\in uv$ • نشان می‌دهیم که uv بزرگترین عنصر ندارد • فرض کنیم $z\in uv$ و $z\leqslant 0$ • چون $u>0$ و $v>0$ • پس $x\in u$ و $y\in v$ وجود دارند بطوریکه $x\geqslant 0$ ، $y\geqslant 0$ وچون u و v بزرگترین عنصر ندارند ، پس $x\in u$ و $y\in v$ وجود دارند بطوریکه $x>0$ و $y>0$ • در اینصورت $z'=xy\in uv$ و $z'>z$ • حال فرض کنیم $z>0$ •
در اینصورت $x\in u$ و $y\in v$ وجود دارند بطوریکه $x>0$ ، $y>0$ و $z=xy$ •
چون u بزرگترین عنصر ندارد ، پس $x'\in u$ وجود دارد بطوریکه $x'>x$ • اگر $z'=x'y$ ، آنگاه بنابه ۷-۳-۱۴ (هـ) و ۷-٤-۱۸ ، $z'>xy=z$ و $z'\in uv$ •
پس uv بزرگترین عنصر ندارد •

قبل از تعمیم ۷-٤-۱۸ به حاصلضرب هر دو عدد حقیقی ، زیر مجموعه $\mathbb{R}^+$ از $\mathbb{R}$ را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در شرایط (الف) و (ب) ، ۶-۲-۵۰ صدق می‌کنـد •

<u>۷-٤-۲۰ : تعریف</u> : زیر مجموعه $\mathbb{R}^+$ از $\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\mathbb{R}^+=\{u\mid u\in\mathbb{R}\wedge u>0\}$$

<u>۷-٤-۲۱ : تمرین</u> : فرض کنید $u\in\mathbb{R}$ • نشان دهید که :

$$u\in\mathbb{R}^+\Longleftrightarrow\exists x(x\in u\wedge x>0)$$

<u>۷-٤-۲۲ : قضیه</u> :

(الف) $u,v\in\mathbb{R}^+\Longrightarrow u+v\in\mathbb{R}^+\wedge uv\in\mathbb{R}^+$

(ب) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است :

$$\alpha = 0 \vee \alpha \in \mathbb{R}^+ \vee -\alpha \in \mathbb{R}^+$$

<u>اثبات :</u>

(الف) چون $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$، پس بنابه ۲۱-۴-۷، $x \in \alpha$ و $y \in \beta$ وجود دارند بطوریکه $x > 0$ و $y > 0$ • پس بنا به ۱۵-۳-۷ (الف)، چون $x + y > 0$ • $x + y \in \alpha + \beta$، پس بنابه ۲۱-۴-۷، $\alpha + \beta \in \mathbb{R}^+$ • همچنین چون $xy > 0$ و $xy \in \alpha\beta$، پس بنابه ۲۱-۴-۷، $\alpha\beta \in \mathbb{R}^+$ •

(ب) اگر $x \in \alpha$ وجود داشته باشد بطوریکه $x > 0$، آنگاه بنابه ۲۱-۴-۷، $\alpha \in \mathbb{R}^+$ • پس فرض کنیم α عنصر مثبت نداشته باشد • در اینصورت دو حالت پیش می‌آید • یکی اینکه α شامل همه اعداد گویای منفی باشد که در اینصورت $\alpha = 0$ و دیگری اینکه عدد گویای منفی x وجود داشته باشد بطوریکه $x \notin \alpha$ • چون $x < 0$ پس $x < \frac{x}{2}$ و در نتیجه $-\frac{x}{2} < -x$ • چون $-(-x) = x \notin \alpha$، پس بنا به ۱۴-۴-۷، $\frac{-x}{2} \in -\alpha$ و چون $\frac{-x}{2} > 0$، پس بنابه ۲۱-۴-۷ $-\alpha \in \mathbb{R}^+$ • بنابراین برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ یکی از حالات زیر برقرار است :

$$\alpha = 0 \vee \alpha \in \mathbb{R}^+ \vee -\alpha \in \mathbb{R}^+$$

روشن است که اگر $\alpha = 0$، آنگاه هیچ یک از دو حالت دیگر نمی‌تواند اتفاق بیافتد • همچنین دو حالت $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و $-\alpha \in \mathbb{R}^+$ نمی‌توانند با هم برقرار باشند، زیرا که در اینصورت با استفاده از بند (الف) خواهیم داشت :

$$0 = (-\alpha) + \alpha > 0$$

که یک تناقض است • پس دقیقاً یکی از حالات فوق برقرار است •

<u>۲۳-۴-۷ : تعریف :</u> مانند ۵۴-۲-۶، برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم :

$$|u| = \begin{cases} u & \text{اگر} \quad u > 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad u = 0 \\ -u & \text{اگر} \quad u < 0 \end{cases}$$

<u>۷-٤-۲٤ : تمرین :</u> برای هر $u \in \mathbb{R}$ نشان دهیدکه $u = 0$ یا $|u| \in \mathbb{R}^+$ •

حال ۷-٤-۱۸ را بصورت زیر تعمیم می دهیم :

<u>۷-٤-۲٥ : تعریف :</u> عمل ضرب روی $\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$uv = \begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad u = 0 \text{ یا } v = 0 \\ |u||v| & \text{اگر} \quad (u > 0 \text{ و } v > 0) \text{ یا } (u < 0 \text{ و } v < 0) \\ -(|u||v|) & \text{اگر} \quad (u < 0 \text{ و } v > 0) \text{ یا } (u > 0 \text{ و } v < 0) \end{cases}$$

در اینصورت روشن‌است که $uv \in \mathbb{R}$ •

<u>۷-٤-۲٦ : تمرین :</u> فرض کنید $u \in \mathbb{R}$ • نشان دهیدکه :

$$u > 0 \Longleftrightarrow -u < 0$$

<u>۷-٤-۲۷ : قضیه :</u>

(الف) ضرب روی $\mathbb{R}$ شرکت‌پذیر است•

(ب) ضرب روی $\mathbb{R}$ جابجایی‌است •

<u>اثبات :</u>

(الف) باید نشان دهیم که برای هر $u ، v ، w \in \mathbb{R}$ داریم :

$$(uv)w = u(vw)$$

وقتی که $u > 0$ ، $v > 0$ و $w > 0$ آنگاه تساوی فوق از شرکت‌پذیر بودن ضرب روی $\mathbb{Q}$ بدست می‌آید • اثبات در حالت کلی نیز با در نظر گرفتن حالات

مختلف بدست می‌آید • بعنوان تمرین این اثبات را بنویسید •

(ب) برای اثبات این بند باید نشان دهیم که برای هر $u\ v \in \mathbb{R}$ داریم:

$$uv = vu$$

مانند بند (الف)، اگر $u > 0$ و $v > 0$، آنگاه تساوی فوق از جابجایی بودن ضرب روی $\mathbb{Q}$ بدست می‌آید • اثبات حالت کلی نیز با در نظر گرفتن حالات مختلف بدست می‌آید و بعنوان تمرین آنرا بنویسید •

<u>۷-٤-۲۸ : تعریف :</u> تعریف می‌کنیم :

$$1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 1\}$$

در ۷-٤-۲ (ب)، دیدیم که $1 \in \mathbb{R}$ • در قضیه زیر نشان می‌دهیم که ۱ عنصر همانی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل ضرب است •

<u>۷-٤-۲۹ : قضیه :</u>

عدد حقیقی ۱ تعریف شده در ۷-٤-۲۸، عنصر همانی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل ضرب است •

<u>اثبات :</u>

برای هر $u \in \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم $u1 = u$ • چون عدد گویای $\frac{1}{2}$ متعلق به ۱ است و $\frac{1}{2} > 0$، پس بنا به ۷-٤-۲۱، $1 > 0$ • فرض کنیم $u > 0$ و $z \in u1$ • اگر $z \leqslant 0$، آنگاه $z \in u$ • زیرا که چون $u > 0$، پس بنابه ۷-٤-۲۱، $x \in u$ وجود دارد بطوریکه $x > 0$ و در نتیجه $z < x$ و بنا به ۷-٤-۱ (ج)، $z \in u$. فرض کنیم $z > 0$ • در اینصورت $x \in u$ و $y \in 1$ وجود دارند بطوریکه $x > 0$، $y > 0$ و $z = xy$ • چون $y \in 1$، پس $y < 1$ و در نتیجه داریم $0 < y < 1$ و $0 < x$ • پس بنابه ۷-۳-۱٤ (هـ)، $xy < x$، و در نتیجه بنابه ۷-٤-۱ (ج)، $z = xy \in u$. حال فرض کنیم $x \in u$ اگر $x \leqslant 0$، آنگاه $x \in u1$ • فرض کنیم $x > 0$ • چون u بزرگترین عنصر ندارد

پس $y \in u$ وجود داردبطوریکه $x < y$ و در نتیجه با استفاده از ۷-۳-۱٤ (هـ) داریم $\frac{x}{y} < 1$ • پس داریم $x = y(\frac{x}{y})$ که در آن $y \in u$ ، $\frac{x}{y} \in 1$ ، $y > 0$ و $\frac{x}{y} > 0$ • بنابراین $x \in u1$ • پس $u1 = u$ •

حال فرض کنیم $u < 0$ • در اینصورت بنابه ۷-٤-۲٥، داریم:

$$u1 = -(|u|\,|1|) = -(|u|1) = -|u| = u$$

اگر $u = 0$ ، آنگاه بنابه ۷-٤-۲٥، $u1 = 0$ و در نتیجه $u1 = u$• چون ضرب روی $\mathbb{R}$ جابجایی است پس، $1u = u$ و در نتیجه داریم $u1 = 1u = u$ • بنا براین ۱ عنصر همانی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل ضرب است •

حال برای هر $u \in \mathbb{R}$ بطوریکه $u \neq 0$ میخواهیم یک معکوس نسبت به عمل ضرب برای u تعریف کنیم • ابتدا تعریف را برای هر $u \in \mathbb{R}$ بطوریکه $u > 0$ انجام می دهیم و سپس با استفاده از تابع قدر مطلق آنرا تعمیم می دهیم •

<u>۷-٤-۳۰ : تعریف :</u> فرض کنیم $u \in \mathbb{R}$ و $u > 0$ در اینصورت تعریف میکنیم :

$$u^{-1} = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge \left(x \leqslant 0 \vee \exists y\left(y \in \mathbb{Q} \wedge x < y \wedge \tfrac{1}{y} \notin u\right)\right)\right\}$$

اگر $u < 0$ ، آنگاه تعریف میکنیم :

$$u^{-1} = -(|u|^{-1})$$

قبل از اثبات این مطلب که $u^{-1} \in \mathbb{R}$ و u^{-1} معکوس u نسبت به عمل ضرب است، ابتدا قضیه کمکی زیر را بیان میکنیم •

<u>۷-٤-۳۱ : قضیه :</u>

(الف) فرض کنیم $x \in \mathbb{Q}$ و $x > 0$ • در اینصورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

(ب) فرض کنیم $x \in \mathbb{Q}$ و $x > 1$ • در اینصورت برای هر $u \in \mathbb{R}$ بطوریکه

$u > 0$، عدد گویای $y \in u$ وجود دارد بطوریکه $xy \notin u$ •

اثبات :

(الف) این بند را بعنوان تمرین نشان دهید •

(ب) چون $x > 1$ ، پس $x - 1 > 0$ • در اینصورت با استفاده از بند (الف) برای هر $n \in N$ داریم :

$$x^n = \left(1 + (x-1)\right)^n \geqslant 1 + n(x-1)$$

اگر برای هر $n \in N$ ، داشته باشیم $x^n \in u$، آنگاه $u = Q$ • زیرا که چون $x - 1 > 0$ ، پس بنا به ۷-۴-۱۵ (ب) برای هر $z \in Q$ وجود دارد $n \in N$ بطوریکه $z < n(x-1)$ و در نتیجه $z < 1 + n(x-1)$ که نتیجه می دهد $z < x^n$ چون $x^n \in u$ ، پس بنا به ۷-۴-۱ (ج) ، $z \in u$ و در نتیجه $u = Q$ که یک تناقض است • بنابراین $n \in N$ وجود دارد بطوریکه $x^n \in u$ و $x^{n+1} \notin u$

پس اگر $y = \frac{x^{n+1}}{x} = x^n$، آنگاه $y \in u$ و $xy \notin u$ •

<u>۷-۴-۳۲ : قضیه</u> : فرض کنیم $u \in R$ و $u \neq 0$ • در اینصورت داریم :

(الف) $u^{-1} \in R$

(ب) $u u^{-1} = u^{-1} u = 1$ •

اثبات :

(الف) ابتدا فرض می کنیم که $u > 0$ • بنابه ۷-۴-۳۰، $0 \in u^{-1}$ و در نتیجه $u^{-1} \neq \Phi$. نشان می دهیم که $u^{-1} \neq Q$ • چون $u > 0$ ، پس بنا به ۷-۴-۲۱، $x \in u$ وجود دارد بطوریکه $x > 0$ و در نتیجه $\frac{1}{x} > 0$. اگر $\frac{1}{x} \in u^{-1}$ ، آنگاه بنابه ۷-۴-۳۰، $y \in Q$ وجود دارد بطوریکه

$\frac{1}{x}<y$ و $\frac{1}{y}\notin u$. چون $0<\frac{1}{x}<y$، پس $\frac{1}{y}<x$ وچون $x\in u$، پس $\frac{1}{y}\in u$ که یك تناقض است. پس $u^{-1}\neq\mathbb{Q}$ ودرنتیجه $\frac{1}{x}\notin u^{-1}$. نشان می دهیم که u^{-1} از پایین بسته است. فرض کنیم $x\in u^{-1}$ و $y<x$. اگر $x\leqslant 0$، آنگاه $y\leqslant 0$ ودرنتیجه $y\in u^{-1}$.

فرض کنیم $0<y<x$. دراینصورت $z\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $x<z$ و $\frac{1}{z}\notin u$. چون $y<x$، پس $y<z$ و $\frac{1}{z}\notin u$ ودرنتیجه بنابه ۳۰-۴-۷، $y\in u^{-1}$. پس u^{-1} ازپایین بسته است. نشان می دهیم که u^{-1} بزرگترین عنصر ندارد. ابتدا نشان می دهیم که چون $u>0$، پس $x\in u^{-1}$ وجود دارد بطوریکه $x>0$. چون $u>0$ و $u\neq\mathbb{Q}$ پس $y\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $y>0$ و $y\notin u$. دراینصورت اگر $z=\frac{1}{y}$، آنگاه $z>0$ و $\frac{1}{z}\notin u$. چون $0<z$، پس بنا به ۱۶-۳-۷، $x\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $0<x<z$. پس بنابه ۳۰-۴-۷، $x\in u^{-1}$ وداریم $x>0$. حال فرض کنیم $x\in u^{-1}$. اگر $x\leqslant 0$، آنگاه چون u^{-1} شامل یك عدد گویای مثبت مانند y است، پس $x<y$. فرض کنیم $x>0$. دراینصورت $y\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $x<y$ و $\frac{1}{y}\in u$. بنابه ۱۶-۳-۷، $z\in\mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $x<z<y$. پس بنابه ۳۰-۴-۷، $z\in u^{-1}$ و $z>x$. بنابراین u^{-1} بزرگترین عنصر ندارد. پس $u^{-1}\in\mathbb{R}$.

حال فرض کنیم $u<0$. دراینصورت $u^{-1}=-(|u|^{-1})$. بنابه اثبات فوق $|u|^{-1}\in\mathbb{R}$ ودرنتیجه $-(|u|^{-1})\in\mathbb{R}$. پس $u^{-1}\in\mathbb{R}$. بنابراین اگر $u\neq 0$، آنگاه $u^{-1}\in\mathbb{R}$.

(ب) مانند بند (الف) ابتدا مطلب را برای $u>0$ ثابت میکنیم و سپس اثبات را تعمیم می دهیم. فرض کنیم $z\in uu^{-1}$. اگر $z\leqslant 0$، آنگاه $z\in 1$. فرض کنیم $z>0$. دراینصورت $x\in u$ و $y\in u^{-1}$ وجود دارند بطوریکه $x>0$، $y>0$ و $z=xy$. چون $y\in u^{-1}$ و $y>0$، پس $y'\in\mathbb{Q}$ وجود داردبطوریکه $y<y'$ و $\frac{1}{y'}\notin u$ ودرنتیجه $\frac{1}{y}\notin u$. پس $x<\frac{1}{y}$ ودرنتیجه $xy<1$. پس $z<1$ و در

نتیجه $1 \in z$ • فرض کنیم $x \in 1$ • در اینصورت $x<1$ • اگر $0 \leq x$ ، آنگاه $x \in u\,u^{-1}$.

پس فرض کنیم $0 < x < 1$ • در اینصورت $\frac{1}{x} > 1$ و بنابه ۷-۳-۱۶، $z \in Q$ وجود دارد بطوریکه $1 < z < \frac{1}{x}$ • بنابه ۷-۴-۳۱ (ب) ، $y \in u$ وجود دارد بطوریکه $yz \notin u$ •

فرض کنیم $z' = \frac{1}{yz}$ • در اینصورت $\frac{1}{z} \notin u$ • چون $y > 0$ و $z < \frac{1}{x}$، پس بنابه ۷-۳-۱۴ (هـ) ، $yz < \frac{y}{x}$ و در نتیجه $\frac{x}{y} < \frac{1}{yz}$ یعنی $\frac{x}{y} < z'$ • چون $\frac{1}{z'} \notin u$، پس $\frac{x}{y} \in u^{-1}$ • حال $x = y\left(\frac{x}{y}\right) \in u\,u^{-1}$ • بنابراین $u\,u^{-1} = 1$.

چون ضرب جابجایی است پس $u^{-1}u = 1$ ودر نتیجه u^{-1} معکوس u نسبت به عمل ضرب است •

حال فرض کنیم $u < 0$ • در اینصورت $u = -|u|$ و همچنین بنابه ۷-۴-۳۰ ، $u^{-1} = -(|u|^{-1})$ • پس داریم:

$$u\,u^{-1} = (-|u|)(-(|u|^{-1})) = |u|\,|u|^{-1} = 1$$

بعلاوه چون ضرب جابجایی است پس $u^{-1}u = 1$ و در نتیجه u^{-1} معکوس u نسبت به عمل ضرب است • بنابراین برای هر $u \neq 0$ ، u^{-1} معکوس u نسبت به عمل ضرب است •

<u>۷-۴-۳۳، قضیه :</u> ضرب نسبت به جمع روی $\mathbb{R}$ پخش است •

<u>اثبات :</u> باید نشان دهیم که برای هر u ، v ، $w \in \mathbb{R}$ داریم:

$$u(v+w) = uv + uw$$

و

$$(u+v)w = uw + vw$$

البته چون ضرب جابجایی است، پس کافیست یکی از تساویهای فوق اثبات شود • با درنظر گرفتن یکی از تساویهای فوق، ابتدا باید آنرا در حالت $u>0$ ، $v>0$ و $w>0$ ثابت کرد و سپس اثبات سایر حالات را از روی آن بدست آورد • بعنوان تمرین اثبات کامل این

قضیه را بنویسید •

۷-٤-۳٤ : نتیجه : ساختمان جبری $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ یك هیات مرتب کامل است •

اثبات :

از ۷-٤-۸، ۷-٤-۱۷، ۷-٤-۲۲، ۷-٤-۲۷، ۷-٤-۲۹، ۷-٤-۳۲ و ۷-٤-۳۳ نتیجه می‌شود •

حال نشان می‌دهیم که هیات مرتب $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ را می‌توان در هیات مرتب $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ محاط نمود • قبل از اینکار به تعریف زیر توجه می‌کنیم •

۷-٤-۳٥ : تعریف : برای هر $x \in \mathbb{Q}$ ، تعریف می‌کنیم :

$$\hat{x} = \{y \mid y \in \mathbb{Q} \wedge y < x\}$$

در اینصورت بسهولت می‌توان دید که $\hat{x} \in \mathbb{R}$ •

۷-٤-۳٦ : قضیه :

تابع $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ، بطوریکه $f(x) = \hat{x}$ برای هر $x \in \mathbb{Q}$ یك همریختی یك بیك از هیات مرتب $\mathbb{Q}$ به هیات مرتب $\mathbb{R}$ است•

اثبات : باید نشان دهیم که برای هر x و $y \in \mathbb{Q}$ ، داریم :

(الف) f یك تابع یك بیك است •

(ب) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ج) $f(xy) = f(x) f(y)$

(د) $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

این مطالب را در زیر نشان می‌دهیم •

(الف) نشان می‌دهیم که f یك بیك است• فرض کنیم $f(x) = f(x')$ • دراینصورت

$\hat{x} = \hat{x}'$.

پس داریم :

$$\{y \mid y \in Q \wedge y < x\} = \{y' \mid y' \in Q \wedge y' < x'\}$$

اگر $x \neq x'$ ، آنگاه بنابه ۱۱-۳-۷، $x < x'$ یا $x' < x$. اگر $x < x'$ ، آنگاه $x \in \hat{x}'$ ، در حالیکه $x \notin \hat{x}$ و در نتیجه $\hat{x} \neq \hat{x}'$ که یک تناقض است. بطریق مشابه اگر $x' < x$ آنگاه نتیجه می‌شود که $\hat{x} \neq \hat{x}'$ که دوباره یک تناقض می‌باشد . بنابراین $x = x'$ و f یک بیک است.

(ب) بااستفاده از تعریف و ۳۵-٤-۷ داریم :

$$f(x+y) = \widehat{x+y} = \{z \mid z \in Q \wedge z < x+y\}$$

وبا استفاده از ۹ ۰ ٤-۷ داریم :

$$f(x)+f(y) = \hat{x} + \hat{y} = \{x'+y' \mid x' \in \hat{x} \wedge y' \in \hat{y}\}$$

$$= \{x'+y' \mid x' < x \wedge y' < y\}$$

فرض کنیم $z \in f(x+y)$. در اینصورت $z < x+y$ و در نتیجه $x+y-z > 0$. پس اگر $z' = \frac{x+y-z}{2}$ ، آنگاه $z' > 0$. فرض کنیم $x' = x - z'$ و $y' = y - z'$. در اینصورت $x' < x$ ، $y' < y$ و $z = x' + y'$ و در نتیجه $z \in f(x)+f(y)$. حال فرض کنیم $z \in f(x)+f(y)$. در اینصورت $z = x'+y'$ بطوریکه $x' < x$ و $y' < y$. بنابه ۱۵-۳-۷ (الف) ، $x'+y' < x+y$ و در نتیجه $z < x+y$. پس $z \in f(x+y)$. بنابراین $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

(ج) این بندرا در حالت $x > 0$ و $y > 0$ ثابت می‌کنیم . تحقیق سایر حالات بعنوان تمرین است. چون $0 < x$ ، پس $0 \in \hat{x}$ و چون $\hat{x}$ بزرگترین عنصر ندارد پس

$\hat{x} \in x'$ وجود دارد بطوریکه $0 < x'$ • پس بنابه ۲۱-۴-۷، $0 < \hat{x}$ • بطریق مشابه $0 < \hat{y}$ و چون $0 < xy$، پس $0 < \hat{x}\hat{y}$ • بااستفاده از تعریف f و ۳۵-۴-۷ داریم :

$$f(xy) = \hat{x}\hat{y} = \{z \mid z \in \mathbb{Q} \wedge z < xy\}$$

و بااستفاده از ۱۸-۴-۷ داریم :

$$f(x)f(y) = \hat{x}\,\hat{y}$$

$$= \{z \mid z \in \mathbb{Q} \wedge (z \leqslant 0 \vee \exists x', y'(x' \in \hat{x} \wedge y' \in \hat{y} \wedge x' > 0 \wedge y' > 0 \wedge z = x'y'))\}$$

$$= \{z \mid z \in \mathbb{Q} \wedge (z \leqslant 0 \vee \exists x', y'(0 < x' < x \wedge 0 < y' < y \wedge z = x'y'))\}$$

فرض کنیم $f(xy)$ z • در اینصورت $z < xy$. اگر $0 \geqslant z$، آنگاه $z \in f(x)f(y)$ •

فرض کنیم $0 < z < xy$ • در اینصورت بنابه ۱۴-۳-۷ (هـ) $\frac{z}{y} < x$ وبنابه ۱۶-۳-۷، $x' \in \mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $\frac{z}{y} < x' < x$ • بااستفاده از ۱۴-۳-۷ (هـ) داریم $\frac{z}{x'} < y$ وبنابه ۱۶-۳-۷، $y' \in \mathbb{Q}$ وجود دارد بطوریکه $\frac{z}{x'} < y' < y$ • پس $z < x'y'$ • چون $0 < x' < x$ و $0 < y' < y$ ، پس $x'y' \in f(x)f(y)$

و چون $f(x)f(y) \in \mathbb{R}$ و $z < x'y'$، پس بنابه ۱-۴-۷ (ج ا)، $z \in f(x)f(y)$ •

حال فرض کنیم $z \in f(x)\,f(y)$ • اگر $z \leqslant 0$، آنگاه چون $f(xy) > 0$، پس $z \in f(xy)$ • فرض کنیم $z > 0$ • در اینصورت $x'y' \in \mathbb{Q}$ وجود دارند بطوریکه $0 < x' < x$ ، $0 < y' < y$ و $z = x'y'$ • بنابه ۱۵-۳-۷، $z = x'y' < xy$ و در نتیجه $z \in f(xy)$ • بنابراین $f(xy) = f(x)f(y)$ •

(د) اگر $x = y$ ، آنگاه چون f یک تابع است ، پس $f(x) = f(y)$ • فرض کنیم که $x < y$ • اگر $x' \in f(x)$، آنگاه $x' \in \hat{x}$ و در نتیجه $x' < x$ •

چون $x < y$ ، پس $x' < y$ و در نتیجه $x' \in \hat{y} = f(y)$ ، پس $f(x) \subseteq f(y)$ •

چون $x < y$ ، پس $x \in \hat{y} = f(y)$ ، درحالیکه $x \notin \hat{x} = f(x)$ • بنا بـــر ایـــــن $f(x) \neq f(y)$ و در نتیجه $f(x) \subset f(y)$ ، یعنی $f(x) < f(y)$ • بنا بر این اگر $x \leq y$ ، آنگاه $f(x) \leq f(y)$ •

تذکـــر:

(الف) با استفاده از قضیه فوق اگر هیات مرتب $(Q ; + , \cdot)$ را باتصویر یکریخت آن تحت f ، یعنی $(f[Q] ; + , \cdot)$ یکسان در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان فرض کرد که Q درداخل R قرار دارد • بدین ترتیب داریم:

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

(ب) می‌توان نشان داد که $(R ; + , \cdot)$ تنها هیات مرتب کامل است • بدین صورت کـــه اگر $(F ; + , \cdot)$ یك هیات مرتب کامل باشد ، آنگاه هیات مرتب $(F ; + , \cdot)$ با هیات مرتب $(R ; + , \cdot)$ یکریخت است • از اثبات این مطلب که قضیه یکتایی $(R ; + , \cdot)$ نامیده می‌شود ، در اینجا صرفنظر می‌کنیم •

۷-۴-۳۷ : تمرین : فرض کنید $u , v , w \in R$ • نشان دهید که :

(الف) $u > 0 \Longleftrightarrow u^{-1} > 0$ •

(ب) $u + w = v + w \Longrightarrow u = v$

(ج) $uw = vw \wedge w > 0 \Longrightarrow u = v$

(د) $u < v \Longleftrightarrow u + w < v + w$

مراجع

1. Bittinger M.L., Logic, Proof and Sets, Addison-Wesley, 1982.
2. Enderton H.B., Elements of Set Theory, Academic Press, 1977.
*3. Halmos P.R., Naive Set Theory, Springer-Verlag, 1974.
4. Spivak M., Calculus, Addison-Wesley, 1967.
*5. Stewart I. and Tall D., The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1979.

* کتب ردیف های ۳ و ۵ بترتیب توسط آقای عبدالحمید دادالله و آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی ترجمه و توسط مرکز نشر دانشگاهی در سالهای ۱۳٦۲ و ۱۳٦۵ ، چاپ شده اند .

بسم الله الرحمن الرحیم

حل مسائل مبانی ریاضیات

حل مسائل فصل ۰

۰-۱-۴

۱- (الف) $\{\phi\} \subseteq \{\phi,\{\phi\}\}$ و $\{\phi\} \in \{\phi,\{\phi\}\}$

(ب) $\{\phi\} \subseteq \{\phi,\{\{\phi\}\}\}$

(ج) $\{\{\phi\}\} \subseteq \{\phi,\{\phi\}\}$

(د) میتوان $\in$ را به جای — قرارداد.

(هـ) هیچ یک از علائم $\in$ یا $\subseteq$ را نمیتوان بجای — قرار داد.

۲- چون $\phi \in \{\phi\}$ پس $\{\phi\} \neq \phi$. همچنین چون $\{\phi\} \in \{\{\phi\}\}$ پس $\{\{\phi\}\} \neq \phi$. بعلاوه $\{\{\phi\}\} \neq \{\phi\}$ زیراکه $\phi \in \{\phi\}$ درحالیکه $\phi \notin \{\{\phi\}\}$.

۳- فرض کنیم $X \in \mathcal{P}(A)$. در اینصورت $X \subseteq A$. چون $A \subseteq B$ پس $X \subseteq B$ و در نتیجه $X \in \mathcal{P}(B)$. بنابراین $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

۴- چون $x \in A$ و $y \in A$ پس $\{x\} \subseteq A$ و $\{x,y\} \subseteq A$.
پس $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ و $\{x,y\} \in \mathcal{P}(A)$ و در نتیجه
$\{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. بنابراین $\{\{x\},\{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

۴-۲-۰

(الف) فرض کنیم $x \in A \cup A$ • در اینصورت $x \in A$ یا $x \in A$ و در نتیجه $x \in A$ • برعکس اگر $x \in A$ آنگاه $x \in A \cup A$. بنابراین $A \cup A = A$ •
حال فرض کنیم $x \in A \cap A$ • در اینصورت $x \in A$ و $x \in A$ • یعنی $x \in A$ • برعکس اگر $x \in A$ آنگاه $x \in A$ و $x \in A$ و در نتیجه $x \in A \cap A$ • بنابراین $A \cap A = A$ •

(ب) فرض کنیم $x \in A \cup B$ • در اینصورت $x \in A$ یا $x \in B$. پس $x \in B$ یا $x \in A$ و در نتیجه $x \in B \cup A$ • بطریق مشابه اگر $x \in B \cup A$ آنگاه $x \in A \cup B$ •
پس $A \cup B = B \cup A$ •
فرض کنیم $x \in A \cap B$ • در اینصورت $x \in A$ و $x \in B$ • پس $x \in B$ و $x \in A$ و در نتیجه $x \in B \cap A$ • بطریق مشابه اگر $x \in B \cap A$ آنگاه $x \in A \cap B$ • پس $A \cap B = B \cap A$ •

(ج) فرض کنیم $x \in A \cup (B \cup C)$ • در اینصورت $x \in A$ یا $x \in B \cup C$. پس یا $x \in A$ یا $x \in B$ یا $x \in C$ • اگر $x \in A$ آنگاه $x \in A \cup B$ ودر نتیجه $x \in (A \cup B) \cup C$ •
اگر $x \in B$ آنگاه $x \in A \cup B$ ودر نتیجه $x \in (A \cup B) \cup C$ • اگر $x \in C$ آنگاه $x \in (A \cup B) \cup C$ • پس در هرحالت $x \in (A \cup B) \cup C$ • بطریق مشابه اگر $x \in (A \cup B) \cup C$ آنگاه $x \in A \cup (B \cup C)$ • بنابراین $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ •

فرض کنیم $x \in A \cap (B \cap C)$ • در اینصورت $x \in A$ و $x \in B \cap C$ • پس $x \in A$ و $x \in B$ و $x \in C$ • پس $x \in A \cap B$ و $x \in C$ و در نتیجه $x \in (A \cap B) \cap C$ • بطریق مشابه اگر $x \in (A \cap B) \cap C$ آنگاه $x \in A \cap (B \cap C)$ • بنابراین $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ •

(د) فرض کنیم $x \in A \cup (B \cap C)$ • در اینصورت $x \in A$ یا $x \in B \cap C$ • اگر $x \in A$ آنگاه $x \in A \cup B$ و $x \in A \cup C$ و در نتیجه $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ •
اگر $x \in B \cap C$ آنگاه $x \in B$ و $x \in C$ پس $x \in A \cup B$ و $x \in A \cup C$ و در نتیجه $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ •

حال فرض کنیم $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. در اینصورت $x \in A \cup B$ و $x \in A \cup C$. پس ($x \in A$ یا $x \in B$) و ($x \in A$ یا $x \in C$) . اگر $x \in A$ آنگاه $x \in A \cup (B \cap C)$. پس حالتی که باقی می ماند این است که $x \in B$ و $x \in C$. در اینصورت $x \in B \cap C$ و در نتیجه $x \in A \cup (B \cap C)$. پس $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

فرض کنیم $x \in A \cap (B \cup C)$. در اینصورت $x \in A$ و $x \in B \cup C$. پس $x \in A$ و ($x \in B$ یا $x \in C$) اگر $x \in A$ و $x \in B$ آنگاه $x \in A \cap B$ و درنتیجه $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ اگر $x \in A$ و $x \in C$ آنگاه $x \in A \cap C$ و در نتیجه $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. پس درهرحالت $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

حال فرض کنیم $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. پس $x \in A \cap B$ یا $x \in A \cap C$. اگر $x \in A \cap B$ آنگاه $x \in A$ و $x \in B$. پس $x \in A$ و $x \in B \cup C$ و درنتیجه $x \in A \cap (B \cup C)$ اگر $x \in A \cap C$ آنگاه $x \in A$ و $x \in C$. پس $x \in A$ و $x \in B \cup C$ و درنتیجه $x \in A \cap (B \cup C)$. بنابراین $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(هـ) فرض کنیم $x \in A - B$. در اینصورت $x \in A$ و $x \notin B$. پس $x \in A$ و $x \notin A \cap B$ و در نتیجه $x \in A - (A \cap B)$.

حال فرض کنیم $x \in A - (A \cap B)$. در اینصورت $x \in A$ و $x \notin A \cap B$. پس $x \in A$ و $x \notin B$ و در نتیجه $x \in A - B$. بنابراین $A - B = A - (A \cap B)$.

فرض کنیم $x \in (A - B) - C$. در اینصورت $x \in A - B$ و $x \notin C$. پس $x \in A$ و $x \notin B$ و $x \notin C$. پس $x \in A$ و $x \notin B - C$ و در نتیجه $x \in A - (B - C)$. بنابراین $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.

(و) فرض کنیم $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. در اینصورت $X \in \mathcal{P}(A)$ یا $X \in \mathcal{P}(B)$. اگر $X \in \mathcal{P}(A)$ آنگاه $X \subseteq A$ پس $X \subseteq A \cup B$ و در نتیجه $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. بنابراین $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

فرض کنیم $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. در اینصورت $X \subseteq A \cap B$. پس $X \subseteq A$ و $X \subseteq B$. پس $X \in \mathcal{P}(A)$ و $X \in \mathcal{P}(B)$ و در نتیجه $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

در اینجا می توان عکس این مطلب را نیز ثابت کرد و در واقع تساوی $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ را اثبات نمود . برای اینکار فرض کنیم

$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ، در اینصورت $X \in \mathcal{P}(A)$ و $X \in \mathcal{P}(B)$ ، پس $X \subseteq A$ و $X \subseteq B$. پس $X \subseteq A \cap B$ و در نتیجه $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ ، بنابر این $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(ز) صورت این مساله باید بصورت $\mathcal{P}(A-B) - \{\phi\} \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ اصلاح شود . فرض کنیم $X \in \mathcal{P}(A-B) - \{\phi\}$ ، در اینصورت $X \in \mathcal{P}(A - B)$ و $X \notin \{\phi\}$. پس $X \subseteq A - B$ و $X \neq \phi$ ، چون $A - B \subseteq A$ پس $X \subseteq A$ ، همچنین $X \nsubseteq B$ زیرا که اگر $X \subseteq B$ آنگاه $X \subseteq (A-B) \cap B$ و چون $(A-B) \cap B = \phi$ پس $X = \phi$ که یک تناقض است ، زیرا فرض بر این بودکه $X \neq \phi$ ، بنابراین $X \subseteq A$ و $X \nsubseteq B$ و در نتیجه $X \in \mathcal{P}(A)$ و $X \notin \mathcal{P}(B)$ ، پس $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ ، بنابراین

$$\mathcal{P}(A-B) - \{\phi\} \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \cdot$$

٥-٢-٧

۱- $\bigcup \mathcal{A} = \{1, 2, 3, \phi, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, \phi\}\}$

$\bigcap \mathcal{A} = \{1\}$

۲- (الف) اگر $X \in \mathcal{A}$ آنگاه $X = \phi$ یا $X = \{\phi\}$ یا $X = \{\phi, \{\phi\}\}$ یا $X = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ و در هرحالت ملاحظه می‌شود که $X \subseteq \mathcal{A}$.

(ب) $\bigcup \mathcal{A} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

ملاحظه می‌شود که $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ ، چون $\phi \in \mathcal{A}$ پس $\bigcap \mathcal{A} = \phi$.

٥-٢-١١

فرض کنیم $x \in A \cap (\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X)$ ، در اینصورت $x \in A$ و $x \in \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ ، پس $x \in A$ وجود دارد X در $\mathcal{A}$ بطوریکه $x \in X$ ، پس وجود دارد X در $\mathcal{A}$ بطوریکه $x \in A \cap X$ و در نتیجه $x \in \bigcup_{X \in \mathcal{A}} (A \cap X)$.

حال فرض کنیم $x \in \bigcup_{X \in \mathcal{A}} (A \cap X)$ ، در اینصورت وجود دارد X در $\mathcal{A}$ بطوریکه $x \in A \cap X$ ، پس وجود دارد X در $\mathcal{A}$ بطوریکه $x \in A$ و $x \in X$ ، پس $x \in A$ و $x \in \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ و در

نتیجه $x\in A\cap(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X)$ ・ بنابراین $A\cap(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X)=\bigcup_{X\in\mathcal{A}}(A\cap X)$ ・

۱۲-۲-۰

۱- فرض کنیم $x\in A$ ・ چون $A\in\mathcal{A}$ پس $x\in\bigcup\mathcal{A}$ ・ بنابراین $A\subseteq\bigcup\mathcal{A}$ ・

فرض کنیم $x\in\bigcap\mathcal{A}$ ・ پس برای هر $X\in\mathcal{A}$ داریم $x\in X$ ・ چون $A\in\mathcal{A}$ پس $x\in A$ ・ بنابراین $\bigcap\mathcal{A}\subseteq A$ ・

۲・(الف) فرض کنیم $x\in\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X$ پس وجود دارد Y در $\mathcal{A}$ بطوریکه $x\in Y$ ・ چون $X\subseteq A$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ پس $Y\subseteq A$ و در نتیجه $x\in A$ ، بنابراین $\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X\subseteq A$ ・

(ب) فرض کنیم $x\in A$ ، چون $A\subseteq X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ پس $x\in X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ ・ بنابراین $x\in\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ ・ پس $A\subseteq\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ ・

۳・ فرض کنیم $Y\in\mathcal{P}(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X)$ ・ پس $Y\subseteq\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ ・ پس $Y\subseteq X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ ・ پس $Y\in\mathcal{P}(X)$ برای هر $X\in\mathcal{A}$

و در نتیجه $Y\in\bigcap_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)$ ・

حال فرض کنیم $Y\in\bigcap_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)$ ・ در اینصورت $Y\in\mathcal{P}(X)$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ ・

پس $Y\subseteq X$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ پس $Y\subseteq\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ و در نتیجه $Y\in\mathcal{P}(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X)$ ・

بنابراین $\mathcal{P}(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X)=\bigcap_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)$ ・

فرض کنیم $Y\in\bigcup_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)$ ・ در اینصورت وجود دارد $X\in\mathcal{A}$ بطوریکه $Y\in\mathcal{P}(X)$ ・

پس وجود دارد $X\in\mathcal{A}$ بطوریکه $Y\subseteq X$ ・ پس $Y\subseteq\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X$ و در نتیجه

$Y\in\mathcal{P}(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X)$ ・ بنابراین $\bigcup_{X\in\mathcal{A}}\mathcal{P}(X)\subseteq\mathcal{P}(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X)$

حل مسائل فصل ١

١-١-٤

در این تمرین بعلت مشابه بودن روش حل فقط جدول درستی وابسته به تمرینات ٢ و ٦ را تشکیل می‌دهیم ٠

٠٢

p	$\neg p$	q	r	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \Rightarrow r$
1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1

٠٦

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

١-١-٦

برای اینکه هریك ازگزاره های این تمرین یك گزاره همیشه درست‌باشدکافیست نشان دهیم که درجدول درستی وابسته به هریك در ستون مربوط به هریك فقط عدد ١ ظاهر می‌شود ٠ در اینجا برای‌مثال جدول درستی وابسته به تمرین (ب) را تشکیل می‌دهیم ٠

(ب)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

پس گزاره $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ یک گزاره همیشه درست است.

۷-۱-۱

اگر جدول درستی وابسته به هریک از گزاره های این تمرین را تشکیل دهید ملاحظه خواهید کرد که فقط گزاره (د) همیشه درست است ۰

۱۰-۱-۱ و ۱۱-۱-۱

برای حل این تمرینات مانند تمرین ٦-۱-۱ کافیست که جدول درستی وابسته به هریک از گزاره های موجود در این تمرینات را تشکیل دهیم و سپس ملاحظه نمائیم که در ستون آنها فقط عدد ۱ ظاهر می‌شود ۰

۲-۲-۱

۱ - اگر بجای x عدد ۱۵ را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل به یک گزاره درست می‌شود ۰ زیرا که ۱۵ بر ۵ قابل قسمت است و از ۲۷ کوچکتر می‌باشد ۰
حال اگر بجای x عدد ۳ را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل به یک گزاره غلط می‌شود ۰ زیرا که ۳ بر ۵ قابل قسمت نیست ۰

۲- اگر بجای x عدد ۱- را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل بیك گزاره درست می‌شود ۰ زیرا که $-2 < -1$ ۰ حال اگر بجای x عدد ۳- را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل بیك گزاره غلط می‌شود ۰ زیرا که $-2 \not< -3$ ۰

۳- اگر بجای x یك مثلث قائم الزاویه قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل بیك گزاره درست می‌شود ۰
حال اگر بجای x یك مثلث متساوی الاضلاع قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل بیك گزاره غلط می‌شود ۰ زیرا که یك مثلث متساوی الاضلاع یك مثلث قائم - الزاویه نیست ۰

٤- اگر بجای x مجموعه $\{۱،۲،۳،۵،۷\}$ قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل بیك گزاره درست می‌شود ۰ زیرا که این مجموعه همه اعداد طبیعی اول کوچکتر از ۱۱ را در بر دارد ۰

حال اگر بجای x مجموعه $\{٦\}$ قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل به یک گزاره غلط می‌شود ۰ زیرا که $\{٦\}$ مجموعه اعداد اول کوچکتر از ۱۱ نمی‌باشد ۰

۵- اگر بجای x ویکتور هوگو را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل به یک گزاره درست می‌شود ۰ زیرا که ویکتور هوگو نویسنده کتاب بینوایان است ۰
حال اگر بجای x چارلز دیکنز را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه تبدیل بیک گزاره غلط می‌شود ۰ زیرا که چارلز دیکنز نویسنده کتاب بینوایان نیست ۰

۱-۲-۳

عبارتهای ۲، ۳ و ٦ گزاره نما هستند ۰ عبارت ۱ یک گزاره و عبارتهای ٤ و ۵ به ترتیب یک جمله عمومی و یک جمله وجودی می‌باشند ۰

۱-۲-۵

۱- اگر بجای x عدد ۰ وبجای y عدد ۰ را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه بیک گزاره درست تبدیل می‌شود ۰ زیرا که $0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0$ ۰
حال اگر بجای x عدد ۱ وبجای y عدد ۱- را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه بیک گزاره غلط تبدیل می‌شود ۰ زیرا که $1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \neq 0$ ۰

۲- اگر بجای x و y دو انسان که برادر یکدیگرند قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه بیک گزاره درست تبدیل می‌شود ۰ درحالیکه اگر بجای x و y دو انسان که برادر یکدیگر نیستند قرار دهیم آنگاه گزاره نما بیک گزاره غلط تبدیل می‌شود۰

۳- اگر بجای x عدد ۱ وبجای y عدد ۹ را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه بیک گزاره درست تبدیل می‌شود ۰ زیرا که $9 > 1$ و $10 > 9$ ۰
حال اگر بجای x عدد ۱ وبجای y عدد ۱۱ را قرار دهیم آنگاه گزاره نما بیک گزاره غلط تبدیل می‌شود ۰ زیرا که $10 \not> 11$

٤- اگر بجای x عدد ۱- وبجای y عدد ۱- را قرار دهیم آنگاه گزاره نمای مربوطه بیک گزاره درست تبدیل می‌شود ۰زیرا که $(-1)(-1) = 1$ ۰

حال اگر بجای x عدد ۱ و بجای y عدد ۱- را قرار دهیم آنگاه گزاره نما بیک گزاره غلط تبدیل می‌شود . زیرا که $(1)(-1) = -1 \neq 1$.

۱-۲-۱۰

با استفاده از ۹-۲-۱ کافیست نشان دهیم که در هریک از گزاره نماهای این تمرین مجموعه های جواب طرفین رابطه دو شرطی با هم مساویند .

(الف) چون $P = \{x | x \in P\}$ و $P = \{x | P_x\}$ پس $\{x | x \in P\} = \{x | P_x\}$

و درنتیجه بنا به ۹-۲-۱ داریم $\{x | x \in P \Longleftrightarrow P_x\} = \mho$.

(ب) می‌دانیم که $\{x | x \in P \vee x \in Q\} = P \cup Q$. نشان می‌دهیم که $\{x | P_x \vee q_x\} = P \cup Q$.

فرض کنیم $\alpha \in \{x | P_x \vee q_x\}$. در اینصورت $P_\alpha \vee q_\alpha$ یک گزاره درست است .

پس P_α درست است یا q_α درست است . اگر P_α درست باشد آنگاه $\alpha \in P$

و درنتیجه $\alpha \in P \cup Q$. اگر q_α درست باشد آنگاه $\alpha \in Q$ و درنتیجه

$\alpha \in P \cup Q$. پس در هر حالت $\alpha \in P \cup Q$. حال فرض کنیم $\alpha \in P \cup Q$.

در اینصورت $\alpha \in P$ یا $\alpha \in Q$. اگر $\alpha \in P$ آنگاه P_α درست است و درنتیجه

$P_\alpha \vee q_\alpha$ درست می‌باشد . پس $\alpha \in \{x | P_\alpha \vee q_\alpha\}$. اگر $\alpha \in Q$

آنگاه q_α درست است و درنتیجه $P_\alpha \vee q_\alpha$ درست می‌باشد . پس

$\alpha \in \{x | P_\alpha \vee q_\alpha\}$. پس در هرحالت $\alpha \in \{x | P_\alpha \vee q_\alpha\}$. بنابراین

$\{x | P_x \vee q_x\} = P \cup Q$. حال بنابه ۹-۲-۱ داریم

$$\{x | x \in P \vee x \in Q \Longleftrightarrow P_x \vee q_x\} = \mho$$

(ج) می‌دانیم که $\{x | x \in P \wedge x \in Q\} = P \cap Q$. نشان می‌دهیم که $\{x | P_x \wedge q_x\} = P \cap Q$.

فرض کنیم $\alpha \in \{x | P_x \wedge q_x\}$. در اینصورت $P_\alpha \wedge q_\alpha$ یک گزاره درست است

پس P_α درست است و q_α درست است . پس $\alpha \in P$ و $\alpha \in Q$ و درنتیجه

$\alpha \in P \cap Q$ • حال فرض کنیم $\alpha \in P \cap Q$ • در اینصورت $\alpha \in P$ و $\alpha \in Q$
پس P_α درست است پس • $P_\alpha \wedge Q_\alpha$ درست است و در نتیجه Q_α درست است و
$\alpha \in \{x | P_x \wedge Q_x\}$ بنابراین $\{x | P_x \wedge Q_x\} = P \cap Q$ • حال بنابه ۹-۲-۱
داریم $U = \{x | x \in P \wedge x \in Q \Longleftrightarrow P_x \wedge Q_x\}$ •

(د) می‌دانیم که $P' = \{x | x \in P'\}$ • نشان می‌دهیم که $\{x | \neg P_x\} = P'$ • فرض
کنیم $\alpha \in \{x | \neg P_x\}$ • در اینصورت $\neg P_\alpha$ درست است و در نتیجه P_α
غلط است • پس $\alpha \notin P$ و در نتیجه $\alpha \in P'$ حال فرض کنیم $\alpha \in P'$ در اینصورت
$\alpha \notin P$ و در نتیجه P_α غلط است • پس $\neg P_\alpha$ درست است و در نتیجه
$\alpha \in \{x | \neg P_x\}$ • بنابراین $\{x | \neg P_x\} = P'$ • حال بنابه ۹-۲-۱ داریم
$U = \{x | x \in P' \Longleftrightarrow \neg P_x\}$ •

۱۲-۲-۱

(الف) فرض کنیم $\alpha \in \{x | P_x \Longrightarrow Q_x\}$ • در اینصورت $P_\alpha \Longrightarrow Q_\alpha$ یک گـــزاره
درست است • چون گزاره $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$ یک گزاره همیشه درســـت
است پس $(P_\alpha \Longrightarrow Q_\alpha) \Longleftrightarrow (\neg P_\alpha \vee Q_\alpha)$ درست است و در نتیجه $\neg P_\alpha \vee Q_\alpha$
درست است • پس $\alpha \in \{x | \neg P_x \vee Q_x\}$ • بطریق مشابه با استفاده ازگزاره
همیشه درست $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$ می‌توان نشان داد که اگر
$\alpha \in \{x | \neg P_x \vee Q_x\}$ آنگاه $\alpha \in \{x | P_x \Longrightarrow Q_x\}$ • پس $\{x | P_x \Rightarrow Q_x\} = \{x | \neg P_x \vee Q_x\}$ •

حال بنابه ۱۱-۲-۱ (ج) داریم $\{x | \neg P_x\} = P'$ و بنابه ۱۱-۲-۱ (الف)
داریم $\{x | \neg P_x \vee Q_x\} = P' \cup Q$ • بنابراین $\{x | P_x \Longrightarrow Q_x\} = P' \cup Q$ •

(ب) فرض کنیم $\alpha \in \{x \mid \neg(P_x \vee Q_x)\}$ ۰ در اینصورت $\neg(P_\alpha \vee Q_\alpha)$ یک گزاره درست است ۰ چون گزاره $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ یک گزاره همیشه درست است پس گزاره $\neg(P_\alpha \vee Q_\alpha) \Longleftrightarrow \neg P_\alpha \wedge \neg Q_\alpha$ یک گزاره درست است و در نتیجه $\neg P_\alpha \wedge \neg Q_\alpha$ درست است ۰ پس $\alpha \in \{x \mid \neg P_x \wedge \neg Q_x\}$ ۰ بطریق مشابه با استفاده از گزاره همیشه درست $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ می توان نشان داد که اگر $\alpha \in \{x \mid \neg P_x \wedge \neg Q_x\}$ آنگاه $\alpha \in \{x \mid \neg(P_x \vee Q_x)\}$ ۰ پس $\{x \mid \neg(P_x \vee Q_x)\} = \{x \mid \neg P_x \wedge \neg Q_x\}$ ۰ حال بنابه ۱۱-۲-۱ (ج) داریم $\{x \mid \neg P_x\} = P'$ و $\{x \mid \neg Q_x\} = Q'$ و بنابه ۱۱-۲-۱ (ب) داریم $\{x \mid \neg P_x \wedge \neg Q_x\} = P' \cap Q'$ ۰ بنابراین $\{x \mid \neg(P_x \wedge Q_x)\} = P' \cap Q'$ ۰

(ج) صورت این تمرین باید بصورت زیر اصلاح شود :

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q \quad \text{و} \quad \{x \mid \neg(P_x \wedge Q_x)\} = P' \cup Q'$$

حل این تمرین کاملاً مشابه حل بند (ب) این تمرین است ۰

(د) فرض کنیم $\alpha \in \{x \mid \neg\neg P_x\}$ ۰ در اینصورت $\neg\neg P_\alpha$ یک گزاره درست است ۰ چون $\neg\neg P \Longleftrightarrow P$ یک گزاره همیشه درست است پس گزاره $\neg\neg P_\alpha \Longleftrightarrow P_\alpha$ درست است و در نتیجه P_α درست است ۰ پس $\alpha \in \{x \mid P_x\}$ ۰ بطریق مشابه با استفاده از گزاره همیشه درست $\neg\neg P \Longleftrightarrow P$ می توان نشان داد که اگر $\alpha \in \{x \mid P_x\}$ آنگاه $\alpha \in \{x \mid \neg\neg P_x\}$ ۰ پس $\{x \mid \neg\neg P_x\} = \{x \mid P_x\}$ ۰ ولی $\{x \mid P_x\} = P$ و در نتیجه $\{x \mid \neg\neg P_x\} = P$ ۰

(هـ) حل این تمرین کاملاً مشابه حل بند (الف) این تمرین است ۰

۱-۲-۱۳

(الف) بنا به ۱-۲-۱۱ (الف) داریم $\{x \mid P_x \vee Q_x\} = P \cup Q$. همچنین بنابه ۱-۲-۱۱ (ج) داریم $\{x \mid \neg(P_x \vee Q_x)\} = (P \cup Q)'$. ولی بنا بـه ۱-۲-۱۲ (ب) داریم $\{x \mid \neg(P_x \vee Q_x)\} = P' \cap Q'$. پس $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$.

(ب) بنا به ۱-۲-۱۱ (ب) داریم $\{x \mid P_x \wedge Q_x\} = P \cap Q$. همچنین بنا به ۱-۲-۱۱ (ج) داریم $\{x \mid \neg(P_x \wedge Q_x)\} = (P \cap Q)'$. ولی بنا بـه ۱-۲-۱۲ (ج) داریم $\{x \mid \neg(P_x \wedge Q_x)\} = P' \cup Q'$. پس $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

(ج) می‌دانیم که $\{x \mid P_x\} = P$. بنابه ۱-۲-۱۱ (ج) داریم $\{x \mid \neg P_x\} = P'$. دوباره بنابه ۱-۲-۱۱ (ج) داریم $\{x \mid \neg\neg P_x\} = (P')'$. ولی بنابه ۱-۲-۱۲ (د) داریم $\{x \mid \neg\neg P_x\} = P$. پس $(P')' = P$.

۱-۳-۲

۱- (x زوج است $\vee$ x فرد است) $\forall x$. $\quad \mathbb{N}$

۲- $\forall x \forall y (xy > x + y)$. $\quad \mathbb{R}$

۳- $\forall x \exists y (y \not< x)$. $\quad \mathbb{R}$

۴- $\forall X \exists Y (X \cap Y = X \cup Y)$. $\quad \mathcal{P}(\mathbb{N})$

۵- $\exists X \exists Y (Y \supseteq X)$. $\quad \mathcal{P}(\mathbb{N})$

• جملات ۱ الی ٤ جملات عومی و جمله ۵ یک جمله وجودی است.

۱-۳-٤

(الف) برای اینکه نشان دهیم که این جمله عمومی درست است کافیست نشان دهیم که مجموعه جواب گزاره نمای واقع در این جمله مساوی مجموعه جهانی یعنی $\mathbb{N}$ است. می دانیم که مجموعه جواب همیشه زیر مجموعه، مجموعه جهانی است.

پس $\{x \mid$ زوج است $x \vee x$ فرد است$\} \subseteq \mathbb{N}$. حال فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{N}$

در اینصورت می دانیم که α فرد است یا α زوج است. پس $\{x \mid x$ فرد است $\vee x$

زوج است$\} \ni \alpha$. بنابراین $\mathbb{N} = \{x \mid x$ فرد است $\vee x$ زوج است$\}$ ودر نتیجه جمله عمومی درست است.

(ب) در این تمرین نیز کافیست نشان دهیم که مجموعه جواب گزاره نمای واقع در این جمله عمومی مساوی مجموعه جهانی است. مجموعه کلیه اشکال هندسی در صفحه را با $\mathcal{U}$ نمایش می دهیم. می دانیم که

$\{x \mid$ همه زوایای x با هم برابرند $\Longleftarrow x$ مثلث متساوی الاضلاع است$\} \subseteq \mathcal{U}$

فرض کنیم $\alpha \in \mathcal{U}$. در اینصورت α یك مثلث متساوی الاضلاع است یا α یك مثلث متساوی الاضلاع نیست. اگر α یك مثلث متساوی الاضلاع باشد آنگاه می دانیم که همه زوایای α مساوی هستند و در واقع هریك مساوی 60° می باشد. پس گزاره "همه زوایای α با هم برابرند $\Longleftarrow \alpha$ مثلث متساوی الاضلاع است" یك گزاره درست است و در نتیجه $\{x \mid$ همه زوایای x با هم برابرند $\Longleftarrow x$ مثلث متساوی الاضلاع است$\} \ni \alpha$. اگر α یك مثلث متساوی الاضلاع نباشد آنگاه گزاره α یك مثلث متساوی الاضلاع است غلط است و در نتیجه گزاره "همه زوایای α با هم برابرند $\Longleftarrow \alpha$ یك مثلث متساوی الاضلاع است" درست است.

پس $\alpha \in \{x \mid$ همه زوایای x با هم برابرند $\Longleftarrow x$ مثلث متساوی الاضلاع است$\}$

پس در هرحالت اگر $\alpha \in \mathcal{U}$ آنگاه $\{x \mid$ همه زوایای x با هم برابرند $\Longleftarrow x$ مثلث متساوی الاضلاع است$\} \ni \alpha$. بنابراین

$U = \{$همه زوایای x با هم برابرند $\Longleftarrow x$ مثلث متساوی الاضلاع است $| x\}$ ودر نتیجه جمله عمومی درست است .

(ج) برای اثبات درست بودن این جمله وجودی کافیست نشان دهیم که مجموعه جواب گزاره نمای واقع در آن مخالف ϕ است . چون $\phi \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\phi' = \mathbb{N}$ پس $\phi \in \{X | X' = \mathbb{N}\}$ و در نتیجه $\{X | X' = \mathbb{N}\} \neq \phi$. بنابراین جمله وجودی درست است .

(د) در این جا نیز کافیست نشان دهیم که $\phi \neq \{$فانی است $x | x\}$. مثلاً اگر α یك انسان در مجموعه کلیه موجودات زنده باشد آنگاه می‌دانیم که α فانی است و در نتیجه $\alpha \in \{$فانی است $x | x\}$. بنابراین $\phi \neq \{$فانی است $x | x\}$ و در نتیجه جمله وجودی درست است .

(هـ) برای اینکه نشان دهیم این جمله عمومی غلط است باید ثابت کنیم که $\{X | X \cup \phi = \phi\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. چون $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\mathbb{N} \cup \phi = \mathbb{N} \neq \phi$ پس $\mathbb{N} \notin \{X | X \cup \phi = \phi\}$ و در نتیجه $\{X | X \cup \phi = \phi\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. بنابراین جمله عمومی غلط است .

(و) برای اینکه نشان دهیم که این جمله وجودی غلط است باید ثابت کنیم که $\phi = \{$جاویدان است $x | x\}$. چون هرموجود زنده فانی است پس عنصری در مجموعه کلیه موجودات زنده وجود ندارد بطوریکه جاویدان باشد . بنابراین $\phi = \{$جاویدان است $x | x\}$ و در نتیجه جمله وجودی غلط است .

۱-۳-٦

(الف) صورت صحیح این تمرین بصورت زیر است :

$$\mathbb{R} \quad \forall x \left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$$

چون برای هر x در $\mathbb{R}$ معادله $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ برقرار است پس می‌توان از نوشتن سور عمومی صرفنظر کرد •

(ب) چون برای هر x در $\mathbb{R}$ بطوریکه $x \neq 0$ عدد $\frac{1}{x}$ یك عدد حقیقی است پس مجموعه جواب گزاره نمای $x \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ برابر مجموعه جهانی می‌باشد و در نتیجه می‌توان از نوشتن سور عمومی صرفنظر کرد •

(ج) چون $N \in \mathcal{P}(N)$ ، $N \neq \phi$ و $N' = \phi \neq N$ پس گزاره $N \neq \Phi \Longrightarrow N' = N$ غلط است و در نتیجه $N \notin \{X | X \neq \Phi \Longrightarrow X' = N\}$. بنا بر این مجموعه جواب گزاره نمای $X \neq \phi \Longrightarrow X' = N$ مخالف مجموعه جهانی است و در نتیجه از نوشتن سور عمومی نمی‌توان صرفنظر کرد •

۱-۲-۱۰

(الف) برای اثبات معتبر بودن این جمله باید نشان دهیم که اگر $\forall x \; P_x$ درست باشد آنگاه P_α نیز درست است• پس فرض کنیم ~~$\forall x \; P_x$ درست باشد~~ • در این صورت $\{x | P_x\} = \mho$ و چون $\alpha \in \mho$ پس $\alpha \in \{x | P_x\}$ و در نتیجه P_α درست است• بنابراین جمله مورد نظر یك جمله معتبر است •

(ب) برای اثبات معتبر بودن این جمله باید نشان دهیم که اگر P_α درست باشد آنگاه $\exists x \; P_x$ نیز درست است • پس فرض کنیم P_α درست باشد • در اینصورت $\alpha \in \{x | P_x\}$ و در نتیجه $\{x | P_x\} \neq \phi$ • پس جمله وجودی $\exists x \; P_x$ درست است • بنابراین جمله مورد نظر یك جمله معتبر می‌باشد.

(ج) فرض کنیم $\forall x \; P_x \wedge \forall x \; Q_x$ درست است • در اینصورت $\forall x \; P_x$ درست است و $\forall x \; Q_x$ درست است • پس $\{x | P_x\} = \mho$ و $\{x | Q_x\} = \mho$ • بنا به ۱-۲-۱۱ (ب) داریم

$$\{x | P_x \wedge Q_x\} = \{x | P_x\} \cap \{x | Q_x\} = \mho \cap \mho = \mho$$

پس $\forall x\,(P_x \wedge q_x)$ درست است ۰

برعکس فرض کنیم $\forall x\,(P_x \wedge q_x)$ درست است ۰ در اینصورت

$\mathcal{U} = \{x \mid P_x \wedge q_x\}$ ۰ از ۱۱-۲-۲ (ب) نتیجه می‌شود که

$\{x \mid P_x \wedge q_x\} \subseteq \{x \mid P_x\}$ و $\{x \mid P_x \wedge q_x\} \subseteq \{x \mid q_x\}$ ۰ پس

$\mathcal{U} \subseteq \{x \mid P_x\}$ و $\mathcal{U} \subseteq \{x \mid q_x\}$ و در نتیجه $\mathcal{U} = \{x \mid P_x\}$ و $\mathcal{U} = \{x \mid q_x\}$ ۰

پس $\forall x\, P_x$ درست است و $\forall x\, q_x$ درست است و در نتیجه

$\forall x\, P_x \wedge \forall x\, q_x$ درست است ۰ بنابراین جمله مورد نظر یک جمله معتبر است ۰

(د) فرض کنیم $\exists x\, P_x \vee \exists x\, q_x$ درست است ۰ پس $\exists x\, P_x$ درست است یا

$\exists x\, q_x$ درست است پس $\{x \mid P_x\} \neq \phi$ یا $\{x \mid q_x\} \neq \phi$ ۰

از ۱۱-۲-۱ (الف) نتیجه می‌شود که $\{x \mid P_x\} \subseteq \{x \mid P_x \vee q_x\}$ و $\{x \mid q_x\} \subseteq \{x \mid P_x \vee q_x\}$ ۰

پس از اینکه $\{x \mid P_x\} \neq \phi$ یا $\{x \mid q_x\} \neq \phi$ نتیجه می شود که

$\{x \mid P_x \vee q_x\} \neq \phi$ ۰ بنابراین $\exists x\,(P_x \vee q_x)$ درست است ۰ برعکس

فرض کنیم $\exists x\,(P_x \vee q_x)$ درست است ۰ در اینصورت $\{x \mid P_x \vee q_x\} \neq \phi$ ۰

بنابه ۱۱-۲-۱ (الف) داریم $\{x \mid P_x \vee q_x\} = \{x \mid P_x\} \cup \{x \mid q_x\}$ ۰

پس $\{x \mid P_x\} \cup \{x \mid q_x\} \neq \phi$ و در نتیجه $\{x \mid P_x\} \neq \phi$ یا $\{x \mid q_x\} \neq \phi$ ۰

بنابراین $\exists x\, P_x$ درست است یا $\exists x\, q_x$ درست است و در نتیجه

$\exists x\, P_x \vee \exists x\, q_x$ درست است ۰ پس جمله مورد نظر یک جمله معتبر است ۰

(هـ) نشان می دهیم که $\{x \mid P_x \vee \neg P_x\} = \mathcal{U}$ ۰ می دانیم که

$\{x \mid P_x \vee \neg P_x\} \subseteq \mathcal{U}$ ۰ فرض کنیم $b \in \mathcal{U}$ ۰ در اینصورت P_b درست است

یا P_b غلط است . پس P_b درست است یا $\neg P_b$ درست است . بنا براین $P_b \vee \neg P_b$ درست است و در نتیجه $b \in \{x \mid P_x \vee \neg P_x\}$. پس $\{x \mid P_x \vee \neg P_x\} = U$ و در نتیجه جمله مورد نظر یک جمله معتبر می‌باشد .

(و) می دانیم که $\exists x\ P_x$ درست است یا $\exists x\ P_x$ غلط است . پس $\exists x\ P_x$ درست است یا $\neg \exists x\ P_x$ درست است . پس $\exists x P_x \vee \neg \exists x P_x$ درست است و در نتیجه یک جمله معتبر می‌باشد .

(ز) فرض کنیم $\forall x (P_x \Longrightarrow q_x)$ درست است . در اینصورت $U = \{x \mid P_x \Longrightarrow q_x\}$. نشان می دهیم که $U = \{x \mid \neg q_x \Longrightarrow \neg P_x\}$. می دانیم که $\{x \mid \neg q_x \Longrightarrow \neg P_x\} \subseteq U$. فرض کنیم $b \in U$. در اینصورت $b \in \{x \mid P_x \Longrightarrow q_x\}$ و در نتیجه $P_b \Longrightarrow q_b$ یک گزاره درست است . حال با استفاده از گزاره همیشه درست $(P \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg P)$ نتیجه می‌شود که $\neg q_b \Longrightarrow \neg P_b$ درست است و در نتیجه $b \in \{x \mid \neg q_x \Longrightarrow \neg P_x\}$. پس $U = \{x \mid \neg q_x \Longrightarrow \neg P_x\}$ و در نتیجه جمله $\forall x (\neg q_x \Longrightarrow \neg P_x)$ درست است .

بطریق مشابه با استفاده از گزاره همیشه درست $(P \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg P)$ می‌توان نشان داد که اگر $U = \{x \mid \neg q_x \Longrightarrow \neg P_x\}$ آنگاه $U = \{x \mid P_x \Longrightarrow q_x\}$. پس می‌توان نشان داد که اگر $\forall x (\neg q_x \Longrightarrow \neg P_x)$ درست باشد آنگاه $\forall x (P_x \Longrightarrow q_x)$ درست است . بنابراین جمله مورد نظر یک جمله معتبر می‌باشد .

۱-۳-۱۱

(الف) برای هر y در N می‌دانیم که $y = y + 0$ پس وجود دارد x در N $(x=0)$ بطوریکه برای هر y در N داریم $x + y = y$ • بنابراین جمله $\exists x \forall y (x+y=y)$ درست است •

(ب) برای هر x در N اگر y را مساوی x در نظر بگیریم آنگاه $y \in N$ و $x = y$ •
پس برای هر x در N عنصر y در N وجود دارد ($y = x$) بطوریکه $x = y$ •
بنابراین $\forall x \exists y (x=y)$ درست است •

(ج) اگر وجود داشته باشد x در N بطوریکه برای هر y در N داشته باشیم $x = y$ آنگاه نتیجه می‌شود که همه عناصر N با هم مساویند که میدانیم چنین نیست بنابراین وجود ندارد x در N بطوریکه برای هر y در N داشته باشیم $x = y$ • پس جمله $\exists x \forall y (x = y)$ غلط است •

(د) می‌دانیم که ۰+۲=۰+۲ پس وجود دارد x و y در $\mathbb{Z}$ ($x=۲$ و $y=۰$) بطوری که $x + 0 = ۲ + y$ • بنابراین جمله $\exists x \exists y (x + 0 = ۲ + y)$ درست است•

(هـ) می‌دانیم که $0 \in \mathbb{Z}$ و برای هر $x \in \mathbb{Z}$ عددی گویا بصورت $x/0$ نداریم •
بعبارت دیگر مثلاً گزاره $1 \in \mathbb{Z} \wedge 0 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 1/0 \in Q$ یك گزاره غلط است • پس جمله $\forall x \forall y (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x/y \in Q)$ غلط است •

(و) می‌دانیم که اگر $x \in \mathbb{Z}$ • $y \in \mathbb{Z}$ و $y \neq 0$ آنگاه x/y یك عدد گویا است •
پس برای هر $x \in \mathbb{Z}$ و $y \in \mathbb{Z}$ اگر $y \neq 0$ آنگاه $x/y \in Q$ بنابراین جمله $\forall x \forall y (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0 \Longrightarrow x/y \in Q)$ درست است •

۱-۳-۱٤

(الف) فرض کنیم $\neg(\forall x \forall y P_{xy})$ درست باشد • در اینصورت $\forall x \forall y P_{xy}$

غلط است . پس وجود دارد a و b در U بطوریکه گزاره P_{ab} غلط است . پس وجود دارد a و b در U بطوریکه $\neg P_{ab}$ درست است . بنابراین $\exists x \exists y (\neg P_{xy})$ درست است .

برعکس فرض کنیم $\exists x \exists y (\neg P_{xy})$ درست است . در اینصورت a و b در U وجود دارند بطوریکه $\neg P_{ab}$ درست است . پس وجود دارند a و b در U به طوری که P_{ab} غلط است . پس $\forall x \forall y P_{xy}$ غلط است و در نتیجه $\neg \forall x \forall y P_{xy}$ درست است . بنابراین جمله مورد نظر معتبر می‌باشد .

(ب) فرض کنیم $\neg \forall x \exists y P_{xy}$ درست است . در اینصورت $\forall x \exists y P_{xy}$ غلط است . پس وجود دارد a در U بطوریکه برای هر b در U گزاره P_{ab} غلط است . پس وجود دارد a در U بطوری که برای هر b در U گزاره $\neg P_{ab}$ درست است . پس $\exists x \forall y (\neg P_{xy})$ درست است .

برعکس فرض کنیم $\exists x \forall y (\neg P_{xy})$ درست است . در اینصورت وجود دارد a در U بطوریکه برای هر b در U گزاره $\neg P_{ab}$ درست است . پس وجود دارد a در U بطوریکه برای هر b در U گزاره P_{ab} غلط است . پس $\forall x \exists y P_{xy}$ غلط است و در نتیجه $\neg \forall x \exists y P_{xy}$ درست است . بنابراین جمله مورد نظر معتبر می‌باشد .

(ج) فرض کنیم $\neg (\exists x \forall y P_{xy})$ درست است . در اینصورت $\exists x \forall y P_{xy}$ غلط است . پس برای هر a در U وجود دارد b در U بطوریکه گزاره P_{ab} غلط است . پس برای هر a در U وجود دارد b در U بطوریکه گزاره $\neg P_{ab}$ درست است . پس $\forall x \exists y (\neg P_{xy})$ درست است .

برعکس فرض کنیم $\forall x \exists y (\neg P_{xy})$ درست است . در اینصورت برای هر a در U

وجود دارد b در $\mathcal{V}$ بطوریکه گزاره $\neg P_{\alpha b}$ درست است • پس برای هر α در $\mathcal{V}$ وجود دارد b در $\mathcal{V}$ بطوریکه گزاره $P_{\alpha b}$ غلط است • پس $\exists x \forall y\, P_{xy}$ غلط است و در نتیجه $\neg \exists x \forall y\, P_{xy}$ درست است • بنابراین جمله مورد نظر معتبر می‌باشد •

(د) فرض کنیم $\neg \exists x \exists y\, P_{xy}$ درست است • در اینصورت $\exists x \exists y\, P_{xy}$ غلط است • پس برای هر α و b در $\mathcal{V}$ گزاره $P_{\alpha b}$ غلط است • پس برای هر α و b در $\mathcal{V}$ گزاره $\neg P_{\alpha b}$ درست است • پس $\forall x \forall y\, (\neg P_{xy})$ درست است •

برعکس فرض کنیم $\forall x \forall y\, (\neg P_{xy})$ درست است • در اینصورت برای هر α و b در $\mathcal{V}$ گزاره $\neg P_{\alpha b}$ درست است • پس برای هر α و b در $\mathcal{V}$ گزاره $P_{\alpha b}$ غلط است • پس $\exists x \exists y\, P_{xy}$ غلط است و در نتیجه $\neg \exists x \exists y\, P_{xy}$ درست است • بنابراین جمله مورد نظر معتبر می‌باشد •

۳-۴-۱

(الف) جدول وابسته به این بحث را تشکیل می‌دهیم :

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow \neg q$
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۱

ملاحظه می‌شود که در این جدول سطری وجود ندارد که در آن $p \wedge q$ و $p \Rightarrow \neg q$ هر دو درست و $\neg q$ غلط باشند • پس بحث مورد نظر معتبر است •

(ب) جدول وابسته به این بحث را تشکیل می‌دهیم •

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1

حال در سطر اول و همچنین در سطر سوم جدول ملاحظه می‌شود که $p \vee q$ و $p \Rightarrow q$ هردو درستند درحالیکه $\neg q$ غلط است • پس بحث مورد نظرمعتبر نیست •

(ج) جدول وابسته به این بحث را تشکیل می‌دهیم •

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \Rightarrow p$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1

در سطر دوم جدول ملاحظه می‌شود که $p \wedge \neg q$ و $q \Rightarrow p$ هردو درستند در حالیکه $\neg p$ غلط است • پس بحث مورد نظر معتبرنیست •

(د) با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم که این بحث معتبراست • فرض کنیم که معتبر نباشد • در اینصورت $p \vee q$ ، $p \Rightarrow r$ و $q \Rightarrow r$ درستند درحالیکه r غلط است • چون r غلط است و $p \Rightarrow r$ و $q \Rightarrow r$ درستند پس p و q هردو غلط هستند • پس $p \vee q$ غلط است که یک تناقض می‌باشد • زیرا که فرض کرده بودیم که $p \vee q$ درست است • بنابراین بحث مورد نظر معتبر می‌باشد •

(هـ) جدول وابسته به این بحث را تشکیل می‌دهیم •

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \neg q$
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱

ملاحظه می‌شود که در سطر سوم این جدول $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \neg q$ هردو درستند درحالیکه $\neg q$ غلط است • پس بحث مورد نظر معتبر نیست •

(و) جدول وابسته به این بحث را تشکیل می‌دهیم •

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$\bar{p} \Rightarrow q \wedge \neg \bar{q}$
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱

ملاحظه می‌شود که در جدول فوق سطری وجود ندارد که $p \Rightarrow q \wedge \neg q$ درست و $\neg p$ غلط باشد • پس بحث مورد نظر معتبر است•

(ز) جدول وابسته به این بحث را تشکیل می‌دهیم •

p	q	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰

ملاحظه می‌شود که درجدول فوق سطری وجود ندارد که $p \wedge \neg q$ درست و q غلط باشد • پس بحث مورد نظر معتبر است•

ح) جدول وابسته به این بحث را تشکیل میدهیم .

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$p \Longleftrightarrow q$
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱

ملاحظه میشود که درجدول فوق سطری وجود ندارد که $p \Longrightarrow q$ و $q \Longrightarrow p$ هر دو درست و $p \Longleftrightarrow q$ غلط باشد . پس بحث مورد نظر معتبر است.

(ط) جدول وابسته به این بحث را تشکیل میدهیم .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Longrightarrow q$	$\neg p \Longrightarrow \neg q$	$p \Longleftrightarrow q$
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱

درجدول فوق ملاحظه میشود که سطری وجود ندارد که در آن $p \Longrightarrow q$ و $\neg p \Longrightarrow \neg q$ هردو درست و $p \Longleftrightarrow q$ غلط باشد . پس بحث مورد نظر معتبر است .

۱-۴-۴

(الف) فرض کنیم $\neg P_\alpha$ درست باشد . در اینصورت P_α غلط است . پس $\forall x\ P_x$ غلط است و در نتیجه $\neg \forall x\ P_x$ درست است . بنابراین بحث مورد نظر معتبرمیباشد .

(ب) فرض کنیم $\forall x(P_x \Longrightarrow q_x)$ و $\neg q_\alpha$ درست باشند . در اینصورت $\mathcal{U} = \{x | P_x \Longrightarrow q_x\}$ و q_α غلط است . چون $\alpha \in \mathcal{U}$ پس $\alpha \in \{x | P_x \Longrightarrow q_x\}$ و درنتیجه $P_\alpha \Longrightarrow q_\alpha$ درست است . چون q_α غلط است و $P_\alpha \Longrightarrow q_\alpha$ درست است پس P_α غلط است. پس $\forall x\ P_x$ غلط است و در نتیجه $\neg \forall x\ P_x$ درست است . بنابراین بحث

مورد مورد نظر معتبر می‌باشد .

(ج) اعتبار این بحث را توسط برهان خلف اثبات می‌کنیم . فرض کنیم که این بحث معتبر نباشد . پس $\forall x(p_x \Rightarrow q_x)$، $\forall x(\neg r_x \Rightarrow \neg q_x)$ و $\forall x(r_x \Rightarrow s_x)$ درستند و $\forall x(p_x \Rightarrow s_x)$ غلط است . پس $\alpha \in U$ وجود دارد بطوریکه $p_\alpha \Rightarrow s_\alpha$ یک گزاره غلط است . پس p_α درست و s_α غلط می‌باشد چون $\forall x(p_x \Rightarrow q_x)$، $\forall x(\neg r_x \Rightarrow \neg q_x)$ و $\forall x(r_x \Rightarrow s_x)$ همگی درستند پس $p_\alpha \Rightarrow q_\alpha$، $\neg r_\alpha \Rightarrow \neg q_\alpha$ و $r_\alpha \Rightarrow s_\alpha$ همگی گزاره های درستند . چون s_α غلط است پس r_α غلط و در نتیجه $\neg r_\alpha$ درست است . پس $\neg q_\alpha$ درست و در نتیجه q_α غلط است . چون $p_\alpha \Rightarrow q_\alpha$ درست است پس p_α غلط است . قبلاً داشتیم که p_α درست است و نتیجه یک تناقض می‌باشد . پس بحث مورد نظر معتبر است .

۱-۵-۳

(الف) اگر x یک عدد طبیعی باشد ، آنگاه x یک عدد زوج یا یک عدد فرد است . فرض کنیم که x زوج باشد . در اینصورت $k \in N$ وجود دارد بطوریکه $x = ۲k$. پس داریم :

$$x^۲ + x + ۱ = ٤k^۲ + ۲k + ۱ = ۲(۲k^۲ + k) + ۱$$

ملاحظه می‌شود که $x^۲ + x + ۱$ در این حالت یک عدد فرد است . حال فرض کنیم x فرد باشد . در اینصورت $k \in N$ وجود دارد بطوریکه $x = ۲k - ۱$. پس داریم :

$$x^۲ + x + ۱ = ٤k^۲ - ٤k + ۱ + ۲k - ۱ + ۱ = ۲(۲k^۲ - k) + ۱$$

در این حالت نیز $x^۲ + x + ۱$ یک عدد فرد است . بنابراین در هر حالت $x^۲ + x + ۱$ یک عدد فرد می‌باشد .

(ب) اگر x یک عدد حقیقی باشد آنگاه $x \geqslant ۰$ یا $x < ۰$. فرض کنیم $x \geqslant ۰$ در اینصورت $-x \leqslant ۰$ و در نتیجه داریم :

$$|-x| = -(-x) = x = |x|$$

حال فرض کنیم $x < ۰$. در اینصورت $-x > ۰$ و در نتیجه داریم :

$$|-x| = -x = |x|$$

پس در هرحالت $|-x| = |x|$.

(ج) اگر x یك عدد حقیقی باشد آنگاه $x \geqslant 0$ یا $x < 0$. فرض کنیم $x \geqslant 0$. در اینصورت $x^2 \geqslant 0$ و در نتیجه داریم:

$$|x^2| = x^2 = |x|^2$$

حال فرض کنیم $x < 0$. در اینصورت $x^2 > 0$ و در نتیجه داریم:

$$|x^2| = x^2 = (-x)^2 = |x|^2$$

پس در هر حالت $|x^2| = |x|^2$.

(د) x یك عدد حقیقی است پس $x \geqslant 0$ یا $x < 0$. فرض کنیم $x \geqslant 0$. در اینصورت داریم:

$$|x| = x \Longrightarrow x \leqslant |x|$$

حال فرض کنیم $x < 0$. در اینصورت $-x > 0$ و داریم:

$$|x| = -x > x \Longrightarrow x < |x|$$

پس در هر حالت $x \leqslant |x|$.

(هـ) می‌دانیم که باقیمانده تقسیم x بر ۳ مساوی ۰ یا ۱ یا ۲ است . بنابه فرض مساوی ۱ نیست . پس باقیمانده تقسیم x بر ۳ مساوی ۰ یا ۲ می‌باشد . بنابراین $x = ۳m$ یا $x = ۳n + ۲$ برای $m, n \in N$. اگر $x = ۳m$ آنگاه $x^2 + x = ۹m^2 + ۳m = ۳(۳m^2 + m)$ و در نتیجه $x^2 + x$ بر ۳ قابل قسمت است . اگر $x = ۳n + ۲$ آنگاه $x^2 + x = ۹n^2 + ۱۲n + ۴ + ۳n + ۲ = ۳(۳n^2 + ۵n + ۲)$ و در نتیجه $x^2 + x$ بر ۳ قابل قسمت است . پس در هر حالت $x^2 + x$ بر ۳ قابل قسمت است .

(و) فرض کنیم $x \geqslant 0$ و $y \geqslant 0$. در اینصورت $xy \geqslant 0$ و در نتیجه داریم:

$$|xy| = xy = |x||y|$$

فرض کنیم $x < 0$ و $y < 0$ در اینصورت $xy > 0$ و در نتیجه داریم:

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

فرض کنیم $x \geqslant 0$ و $y < 0$. در اینصورت $xy \leqslant 0$ و در نتیجه داریم:

$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$$

فرض کنیم $x<0$ و $y\geqslant 0$ در اینصورت $xy\leqslant 0$ و در نتیجه داریم:

$$|xy|=-xy=(-x)y=|x||y|$$

پس در هرحالت $|xy|=|x||y|$ ٠

۱-۵-۵

(الف) عدد طبیعی ۳ را در نظر می‌گیریم ٠ در اینصورت ۳ یك عدد فرداست ولی $۹=۳^۲$ یك عدد زوج نیست ٠ پس ۳ یك مثال ناقض برای این جمله می‌باشد ٠

(ب) عدد طبیعی ۱۱ را در نظر می‌گیریم ٠ در اینصورت کلیه تجزیه های ۱۱ به حاصلجمع دو عدد طبیعی بصورت زیر می‌باشد :

۶+۵=۱۱ و ۷+۴=۱۱ و ۸+۳=۱۱ و ۹+۲=۱۱ و ۱۰+۱=۱۱

ملاحظه می‌شود که هیچ یك از تجزیه های فوق بصورت حاصلجمع دو عدد اول نیست٠ بنابراین ۱۱ را نمی‌توان بصورت حاصلجمع دو عدد اول نوشت ٠ پس ۱۱ یك مثـال ناقض برای این جمله است ٠

(ج) فرض کنیم $A=\{۱و۲و۳\}$ ، $B=\{۲و۳\}$ و $C=\{۳و۴\}$ ٠ در اینصورت داریم:

$$A-B=\{۱\} \text{ و } B-C=\{۲\}$$

و در نتیجه

$$A-(B-C)=\{۱و۳\} \text{ و } (A-B)-C=\{۱\}$$

ملاحظه می‌شود که در اینجا $A-(B-C)\neq(A-B)-C$ ٠ پس مجموعه های A، B و C تعریف شده در بالا یك ناقض برای این جمله است٠

(د) فرض کنیم $A=\{۱و۲\}$ و $B=\{۲و۳\}$ ٠ در اینصورت $A\cup B=\{۱و۲و۳\}$ و در نتیجه داریم :

$$\mathcal{P}(A)=\{\phi و \{۱\} و \{۲\} و \{۱و۲\}\} \text{ و } \mathcal{P}(B)=\{\phi و \{۲\} و \{۳\} و \{۲و۳\}\}$$

و

$$\mathcal{P}(A\cup B)=\{\phi و \{۱\} و \{۲\} و \{۳\} و \{۱و۲\} و \{۱و۳\} و \{۲و۳\} و \{۱و۲و۳\}\}$$

و

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\phi ، \{۱\} ، \{۲\} ، \{۳\} ، \{۱،۲\} ، \{۲،۳\}\}$$

ملاحظه می‌شود که $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$. پس مجموعه های A و B تعریف شده در بالا یک مثال ناقض برای این جمله است.

(هـ) در تمرین ۴-۲-۰ (و) ثابت کردیم که تساوی $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ در حالت عمومی برقرار است . بنابراین صورت این تمرین غلط می‌باشد .

(و) فرض کنیم $A = \{۱،۲\}$ و $B = \{۲،۳\}$. در اینصورت $A - B = \{۱\}$ ودر نتیجه داریم :

$\mathcal{P}(A) = \{\phi ، \{۱\} ، \{۲\} ، \{۱،۲\}\}$ و $\mathcal{P}(B) = \{\phi ، \{۲\} ، \{۳\} ، \{۲،۳\}\}$

و

$$\mathcal{P}(A-B) = \{\phi ، \{۱\}\} ، \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{\{۱\} ، \{۱،۲\}\}$$

ملاحظه می‌شود که $\mathcal{P}(A-B) \neq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$. پس مجموعه های A و B تعریف شده در بالا یک مثال ناقض برای این جمله است.

۲-۵-۶

(الف) چون $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ پس $A - B \subseteq C$ و در نتیجه داریم :

$$C \cup (A-B) = C ، C \cup A = C ، C \cup B = C$$

و

$$(C \cup A) - (C \cup B) = C - C = \phi$$

چون $C \neq \phi$ پس ملاحظه می‌شود که به ازای $X = C$ تساوی برقرار نیست . پس C یک مثال ناقض برای تساوی است . پس جمله عمومی غلط است و در نتیجه نفی آن درست می‌باشد .

(ب) چون $A \neq B$ پس x وجود دارد بطوریکه $x \in A$ و $x \notin B$ یا $x \in B$ و $x \notin A$. پس $A - B \neq \phi$ یا $B - A \neq \phi$. اگر $B - A \neq \phi$ آنگاه داریم :

$$B - (A \cup B) = \phi ، (B-A) \cup (B-B) = (B-A) \cup \phi = B - A \neq \phi$$

پس به ازای $X = B$ تساوی برقرار نیست . اگر $A - B \neq \phi$ آنگاه بطریق

مشابه می‌توان نشان داد که به ازای $X=A$ تساوی برقرار نیست • پس در هر حالت می‌توان یک مثال ناقض برای تساوی ارائه نمود • بنابراین جمله عمومی غلط است و در نتیجه نفی آن درست می‌باشد •

۱-۵-۹

(الف) فرض کنیم $\phi - A \neq \phi$ • در اینصورت عنصر x وجود دارد بطوریکه $x \in \phi - A$ و در نتیجه $x \in \phi$ و $x \notin A$ • ولی $x \in \phi$ یک تناقض است زیرا که ϕ عنصر ندارد •
پس $\phi - A = \phi$ •

(ب) فرض کنیم که گزاره مورد نظر غلط باشد • در اینصورت $p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s$ درست و $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow (r \Longrightarrow s))$ غلط است• پس p درست و $q \Longrightarrow (r \Longrightarrow s)$ غلط است • پس q درست و $r \Longrightarrow s$ غلط است • پس r درست و s غلط است•
چون p ، q و r همگی درستند پس $p \wedge q \wedge r$ درست است • چون s غلط است پس $p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s$ غلط است • که یک تناقض می‌باشد زیراکه داشتیم $p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s$ درست است • پس گزاره مورد نظر همیشه درست می‌باشد •

(ج) فرض کنیم که $\sqrt{2}$ اصم نباشد • پس یک عدد گویاست و در نتیجه اعداد صحیح m و n وجود دارند بطوریکه $\sqrt{2} = m/n$ • می‌توان فرض کرد که m و n نسبت بهم اولند • حال داریم:

$$\sqrt{2} = m/n \Longrightarrow 2 = m^2/n^2 \Longrightarrow m^2 = 2n^2$$

پس m^2 یک عدد زوج و در نتیجه m یک عدد زوج است• پس عدد صحیح k وجود دارد بطوریکه $m = 2k$ • پس $m^2 = 4k^2$ و در نتیجه $n^2 = 2k^2$ • پس n^2 یک عدد زوج و در نتیجه n یک عدد زوج است• چون m و n هردو زوج هستند پس نسبت بهم اولند نیستند که این یک تناقض است زیرا که فرض کرده بودیم که m و n نسبت بهم اولند • بنابراین $\sqrt{2}$ یک عدد اصم است •

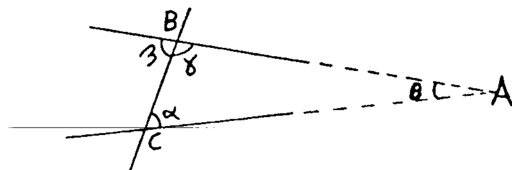
(د) فرض کنیم که جمله مورد نظر غلط باشد • در اینصورت عدد حقیقی α وجود دارد

بطوریکه $\sqrt{۲}-\alpha$ و $\sqrt{۲}+\alpha$ هردو اعداد گویا هستند • چون مجموع دو عـدد گویا یك عدد گویاشت پس $۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}-\alpha)+(\sqrt{۲}+\alpha)$ یك عدد گویاست ، پس عدد گویای g وجود دارد بطوریکه $۲\sqrt{۲}=g$ و در نتیجه $\sqrt{۲}=g/۲$ • چون $g/۲$ نیز یك عدد گویاست پس $\sqrt{۲}$ باید یك عدد گویاباشدکه این یـــك تناقض است زیرا که در بالا نشان دادیم $\sqrt{۲}$ یك عدد داصم است • بنابراین جملـه مورد نظر درست است •

(هـ) فـرض کنیـم که جملـــه مورد نظرغلط با شد • پس عـــدد طبیعـــــــی n وجـــود دارد بطوریکـــــه عـــددزوج y باخاصیــــت $y>n$ وجود ندارد •ولـــی $۲n$ یك عددزوج استوچـــون n یك عـــدد طبیعی اســـت پس $۲n>n$• پـــس عدد طبیعی وزوج y' وجود داردبطوریکه $n<y'$, که ایـــن یك تناقض است • پس جمله مورد نظرد رست است•

(و) اثبات این تمرین کاملاً مشابه اثبات تمرین بند فوق است •

(ز) فرض کنیم که دو خط a و b یکدیگر را در نقطه ای مانند A قطع می کنند •بنابرایـن شکل زیر را خواهیم داشت •



می دانیم که $\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$ • چون $\alpha=\beta$ پس $\alpha+\gamma=۱۸۰^\circ$ • ولی در مثلث ABC داریم $\alpha+\gamma+\theta=۱۸۰^\circ$ • پس $\alpha+\gamma=\alpha+\gamma+\theta$ و در نتیجه $\theta=۰$ که یك تناقض است • پس دو خط a و b یکدیگر را قطع نمی کنند •

<u>۱-٦-٦</u>

(الف) <u>پایه استقرا</u> فرض کنیم $n=۱$ • در اینصورت $۲^۱=۲>۱$ • پس پایه استقـرا برقرار است •

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد طبیعی n داشته باشیم $2^{n} > n$ ۰ چون برای هرعدد طبیعی n داریم $2^{n} > 1$ پس خواهیم داشت :

$$2^{n} + 2^{n} > n + 1 \Longrightarrow 2^{n+1} > n+1$$

بنابراین گام استقرا نیز برقرار است ۰ پس جمله مورد نظر درست است۰

(ب) پایه استقرا برای $n = 0$ داریم $2(0) = 0 \leqslant 1 = 2^{0}$ ۰ پس پایه استقرا برقـــرار است ۰

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد طبیعی n داشته باشیم $2n \leqslant 2^{n}$ ۰ چون بـــرا ی هـر $n \geqslant 1$ داریم $2 \leqslant 2^{n}$ پس خواهیم داشت :

$$2n + 2 \leqslant 2^{n} + 2^{n} \Longrightarrow 2(n+1) \leqslant 2^{n+1}$$

بنابراین گام استقرا نیز برقرار است ۰ پس جمله مورد نظر درست است۰

(ج) پایه استقرا برای $n = 1$ داریم $a^{1} < b^{1} \Longleftarrow a < b$ و در نتیجه پایه استقـــرا برقرار است ۰

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد طبیعی n داشته باشیم $a < b \Longrightarrow a^{n} < b^{n}$

چون a و b اعداد حقیقی مثبت هستند و $a < b$ و $a^{n} < b^{n}$ پس داریم :

$$a^{n} \cdot a < b^{n} \cdot b \Longrightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$

بنابراین داریم $a < b \Longrightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$ و در نتیجه گام استقرا نیز برقـــرار است ۰ پس جمله مورد نظر درست است ۰

(د) پایه استقرا برای $n = 1$ داریم $\frac{2-1}{2-1} = 1$ و در نتیجه پایه استقرار برقـــرا ر اســـت ۰

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد طبیعی n داشته باشیم ۰

$$1 + 2 + 2^{2} + \cdots\cdots + 2^{n-1} = \frac{2^{n}-1}{2-1}$$

حال 2^n را به طرفین تساوی فوق می‌افزاییم • در اینصورت خواهیم داشت :

$$1+2+\cdots+2^{n-1}+2^n=\frac{2^n-1}{2-1}+2^n=\frac{2^n-1+2\cdot 2^{n+1}-2^n}{2-1}$$

و در نتیجه داریم:

$$1+2+\cdots+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

پس گام استقرا نیز برقرار است و در نتیجه جمله مورد نظر درست است •

(هـ) <u>پایه استقرا</u> برای $n=0$ داریم $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}=0$ و در نتیجه پایه استقرا برقرار است •

<u>گام استقرا</u> فرض کنیم که برای عدد طبیعی n داریم :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حال $(n+1)^2$ را بطرفین تساوی فوق می‌افزائیم • در اینصورت خواهیم داشت :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

پس از انجام عملیات برای محاسبه حاصلجمع سمت راست تساوی فوق خواهیم داشت •

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

پس گام استقرا نیز برقرار است و در نتیجه جمله مورد نظر درست است•

(و) <u>پایه استقرا</u> برای $n=0$ عدد $n^2+n=0$ بر ۲ قابل قسمت است و در نتیجه پایه استقرا بر قرار می‌باشد •

<u>گام استقرا</u> فرض کنیم که برای عدد طبیعی n عدد n^2+n بر ۲ قابل قسمت است • حال داریم : $(n+1)^2+(n+1)=(n^2+n)+2(n+1)$ •

چون n^2+n و $2(n+1)$ هردو بر ۲ قابل قسمت هستند پس حاصلجمع آنها نیز بر ۲ قابل قسمت است و در نتیجه $(n+1)^2+(n+1)$ بر ۲ قابل قسمت است. پس گام استقرا نیز برقرار است و در نتیجه جمله مورد نظر درست می‌باشد.

(ز) پایه استقرا برای $n=0$ می‌دانیم که گزاره $P_0 \vee q \Longleftrightarrow P_0 \vee q$ همیشه درست است. پس پایه استقرا برقرار است.

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد طبیعی n گزاره زیر همیشه درست باشد:

$$(P_0 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n) \vee q \Longleftrightarrow (P_0 \vee q) \wedge \cdots \wedge (P_n \vee q)$$

می‌دانیم که برای هرسه گزاره r، s و t گزاره $(r \wedge s) \vee t \Longleftrightarrow (r \vee t) \wedge (s \vee t)$ همیشه درست است. پس گزاره زیر همیشه درست است:

$$(P_0 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n \wedge P_{n+1}) \vee q \Longleftrightarrow ((P_0 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n) \vee q) \wedge (P_{n+1} \vee q)$$

ولی بنابه فرض گزاره زیر همیشه درست است:

$$((P_0 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n) \vee q) \wedge (P_{n+1} \vee q) \Longleftrightarrow (P_0 \vee q) \wedge \cdots\cdots \wedge (P_n \vee q) \wedge (P_{n+1} \vee q)$$

بنابراین گزاره زیر همیشه درست است:

$$(P_0 \wedge \cdots\cdots \wedge P_{n+1}) \vee q \Longleftrightarrow (P_0 \vee q) \wedge \cdots\cdots \wedge (P_{n+1} \vee q)$$

پس گام استقرا نیز برقرار است و در نتیجه جمله مورد نظر درست می‌باشد.

(ح) پایه استقرا بر $n=0$ می‌دانیم $\dfrac{\begin{matrix} P \Longleftrightarrow P_0 \\ P_0 \Longleftrightarrow q \end{matrix}}{P \Longleftrightarrow q}$ یک بحث معتبر است. پس پایه استقرا برقرار است.

گام استقرا فرض کنیم که برای عدد طبیعی n بحث زیر یک بحث معتبر باشد:

$$\frac{\begin{matrix} P \Longleftrightarrow P_0 \\ \vdots \\ P_n \Longleftrightarrow q \end{matrix}}{P \Longleftrightarrow q}$$

بنابراین بحث زیر یک بحث معتبر است :

$$\frac{p \Leftrightarrow p_0}{\begin{matrix} p_n \Leftrightarrow p_{n+1} \\ p_{n+1} \Leftrightarrow q \end{matrix}}$$

$$\frac{p \Leftrightarrow p_{n+1}}{p_{n+1} \Leftrightarrow q}$$

ولی می دانیم که بحث $p \Leftrightarrow p_{n+1}$ یک بحث معتبر است و در نتیجه بحث زیر یک بحث معتبر است:

$$\frac{p_{n+1} \Leftrightarrow q}{p \Leftrightarrow q} \qquad p \Leftrightarrow p_0$$

$$\frac{p_{n+1} \Leftrightarrow q}{p \Leftrightarrow q}$$

بنابراین گام استقرا نیز برقرار است ودر نتیجه جمله مورد نظر درست است.

<u>۱-۷-٤</u>

(الف) این جمله را با استفاده از بحث (۱) در صفحه ۷۹ ثابت می‌کنیم . فرض کنیم n فرد باشد . در اینصورت عدد طبیعی K وجود دارد بطوریکه $n = ۲K - ۱$. پس $n^۲ = ٤K^۲ - ٤K + ۱$ و در نتیجه $n^۲ = ۲(۲K^۲ - ۲K) + ۱$ یک عدد فرد است . حال فرض کنیم $n^۲$ فرد باشد . در اینصورت n نیز فرد است زیرا که اگر زوج باشد آنگاه $n^۲$ نیز زوج می‌شود که برخلاف فرض است. بنابراین جمله مورد نظر اثبات می‌شود .

(ب) این جمله را با استفاده از بحث (۲) در صفحه ۷۹ ثابت می‌کنیم . فرض کنیم n فرد است . در اینصورت عدد طبیعی K وجود دارد بطوریکه $n = ۲K - ۱$ ودر نتیجه

$2K = 1 + 1 - 2K = 1 + n$ یك عدد زوج است • حال فرض کنیم که n فرد نباشد یعنی n زوج است و در نتیجه عدد طبیعی K وجود دارد بطوریکه $n = 2K$ • پس $1 + 2K = 1 + n$ یك عدد فرد است ، یعنی یك عدد زوج نیست • بنابراین جمله مورد نظر اثبات می‌گردد •

(ج) این جمله را با استفاده از بحث (۱) در صفحه ۷۹ ثابت می‌کنیم • فرض کنیم n زوج باشد • در اینصورت عدد طبیعی K وجود دارد بطوریکه $n = 2K$ و در نتیجه $(1 + K) 2 = 2 + 2K = 2 + n$ نیز یك عدد زوج است • حال فرض کنیم $n+2$ زوج باشد • در اینصورت عدد طبیعی K وجود دارد بطوریکه $n + 2 = 2K$ و در نتیجه $(1 - K) 2 = n$ یك عدد زوج است• بنابراین جمله مورد نظر اثبات می‌شود •

(د) این جمله را با استفاده از بحث (۲) در صفحه ۷۹ ثابت می‌کنیم • فرض میکنیم $\exists x \exists y \, P_{xy}$ درست باشد • در اینصورت a و b در U وجود دارند• بطوریکه گزاره P_{ab} درست است • پس $\exists y \exists x \, P_{xy}$ درست است زیرا که با قرار دادن $y = a$ و $x = b$ گزاره‌نمای P_{xy} به گزاره P_{ab} که یك گزاره درست است تبدیل می‌شود • حال فرض کنیم $\exists x \exists y \, P_{xy}$ غلط باشد • در اینصورت برای هر a و b در U گزاره P_{ab} غلط است • پس $\exists y \exists x \, P_{xy}$ غلط است • بنابراین جمله مورد نظر اثبات می‌گردد •

(هـ) جمله این تمرین باید بصورت زیر اصلاح شود :

$$\forall x \, (x \geqslant 0 \iff |x| = x)$$

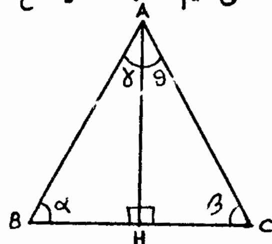
حال این جمله را با استفاده از بحث (۱) در صفحه ۷۹ ثابت می‌کنیم • می‌دانیم‌که:

$$|x| = \begin{cases} x \; ; & x \geqslant 0 \text{ اگر} \\ -x \; ; & x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

پس اگر $x \geqslant 0$ آنگاه بنابه تعریف $|x| = x$ و برعکس اگر $|x| = x$ آنگاه بنا

به تعریف $x \geqslant 0$ بنابراین جمله موردنظر اثبات می‌گردد .

(و) این جمله را با استفاده از بحث (۱) در صفحه ۷۹ ثابت می‌کنیم . ابتدا ارتفاع مثلث را رسم کرده و شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



فرض کنیم که $AB = AC$. در اینصورت دو مثلث قائم الزاویه AHB و AHC دارای دو وتر مساوی و یک ضلع مشترک هستند و در نتیجه با هم مساویند . پس $\alpha = \beta$.

حال فرض کنیم $\alpha = \beta$. در اینصورت $\alpha + \gamma + 90^\circ = \beta + \theta + 90^\circ$ و در نتیجه $\gamma = \theta$. پس دو مثلث AHB و AHC دارای دو زاویه و ضلع بین مشترک هستند و در نتیجه با هم مساویند . بنابراین $AB = AC$. پس جمله مورد نظر اثبات می‌گردد .

۳-۸-۱

(الف) <u>مرحله وجودی</u> می‌دانیم که برای هر y داریم $1y = y1 = y$ و در نتیجه x وجود دارد $(x = 1)$ بطوریکه $xy = yx = y$ برای هر y .

<u>مرحله یکتایی</u> فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند بطوریکه برای هر y داریم:

$$ay = ya = y \qquad (1)$$

و

$$by = yb = y \qquad (2)$$

حال با قراردادن b بجای y در تساویهای (۱) و a بجای y در تساویهای (۲) خواهیم داشت :

$$ab = ba = b$$

و

$$ba = ab = a$$

پس $a = b$.

ب) مرحله وجودی می‌دانیم که برای هر x داریم $x+(-x)=(-x)+x=0$ پس برای هر x وجود دارد y ($y=-x$) بطوریکه $x+y=y+x=0$.

مرحله یکتایی فرض کنیم که برای هر x وجود داشته باشد a و b بطوریکه داشته باشیم :

$$x+a=a+x=0 \qquad (1)$$

و

$$x+b=b+x=0 \qquad (2)$$

در اینصورت از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $a=b$.

ج) مرحله وجودی میدانیم که برای هر x اگر $x\neq 0$ آنگاه داریم: $x(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})x=1$. پس برای هر x اگر $x\neq 0$ آنگاه y وجود دارد ($y=\frac{1}{x}$) بطوریکه $xy=yx=1$.

مرحله یکتایی فرض کنیم که برای هر x اگر $x\neq 0$ آنگاه a و b وجود دارند بطوریکه :

$$xa=ax=1 \qquad (1)$$

و

$$xb=bx=1 \qquad (2)$$

در اینصورت از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $a=b$.

د) مرحله وجودی می‌دانیم که برای هر Y چون $Y\subseteq A$ پس $A\cap Y=Y\cap A=Y$. پس X وجود دارد ($X=A$) بطوریکه برای هر Y داریم $X\cap Y=Y\cap X=Y$.

مرحله یکتایی فرض کنیم B و C وجود دارند بطوریکه برای هر Y داریم:

$$B\cap Y=Y\cap B=Y \qquad (1)$$

و

$$C\cap Y=Y\cap C=Y \qquad (2)$$

حال با قرار دادن A بجای Y در هر دو تساویهای (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$B \cap A = A \cap B = A \qquad (۳)$$

و

$$C \cap A = A \cap C = A \qquad (٤)$$

از تساویهای (۳) نتیجه می‌شود که $A \subseteq B$ و از تساویهای (٤) نتیجه می‌شود که $A \subseteq C$ چون $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$ پس $B = A = C$.

(هـ) صورت این مساله باید بصورت زیر اصلاح شود :

برای هر X یك و فقط یك Y وجود دارد بطوریکه $X \cup Y = Y \cup X = A$ و $X \cap Y = Y \cap X = \phi$.

<u>مرحله وجودی</u> برای هر X اگر X' مکمل X در A باشد آنگاه می دانیم که $X \cup X' = X' \cup X = A$ و $X \cap X' = X' \cap X = \phi$. پس برای هر X وجود دارد Y $(Y = X')$ بطوریکه $X \cup Y = Y \cup X = A$ و $X \cap Y = Y \cap X = \phi$.

<u>مرحله یکتایی</u> فرض کنیم که برای هر X وجود داشته B و C بطوریکه داشته باشیم:

$$X \cup B = B \cup X = A \wedge X \cap B = B \cap X = \phi \quad (۱)$$

و

$$X \cup C = C \cup X = A \wedge X \cap C = C \cap X = \phi \quad (۲)$$

در اینصورت از تساویهای (۱) نتیجه می‌شود که $B = X'$. زیرا که اگر $b \in B$ آنگاه $b \notin X$. چون در غیر اینصورت $b \in B \cap X$ که نتیجه می دهد $B \cap X \neq \phi$. پس $b \notin X$ و در نتیجه $b \in X'$ برعکس اگر $x' \in X'$ آنگاه $x' \notin X$. چون $x' \in A$ پس $x' \in X \cup B$ و چون $x' \notin X$ پس $x' \in B$. بنابراین $B = X'$. بطریق مشابه از تساویهای (۲) نتیجه می‌شود $C = X'$. بنابراین $B = C$.

حل مسائل فصل ۲:

۲-۱-٤

فرض کنیم $\{x, \{y\}\} = (x, y)$ • در اینصورت داریم:

$$(\{\phi\}, \{\phi\}) = \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\} \text{ و } (\{\{\phi\}\}, \phi) = \{\{\{\phi\}\}, \{\phi\}\}$$

ملاحظه می‌شود که در اینصورت $(\{\{\phi\}\}, \phi) = (\{\phi\}, \{\phi\})$ ولی $\{\phi\} \neq \{\{\phi\}\}$ و $\{\phi\} \neq \phi$ •

پس با تعریف $\{x, \{y\}\} = (x, y)$ نمی‌توان قضیه ۲-۱-۱ را

بیان نمود •

۲-۱-٦

چون $\{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y)$ و $x, y \in A$ پس بنابه تمرین ٤-۱-٥ بند

٤ داریم $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ •

۲-۱-۱۱

۱- (الف) فرض کنیم $\phi \times A \neq \phi$ • در اینصورت زوج مرتب (x, y) وجود دارد

بطوریکه $(x, y) \in \phi \times A$ • پس $x \in \phi$ و $y \in A$ • ولی $x \in \phi$ یک

تناقض است و در نتیجه $\phi \times A = \phi$ • بطریق مشابه می‌توان نشان داد که

$A \times \phi = \phi$ • بنابراین $\phi \times A = A \times \phi = \phi$ •

(ب) چون $A \neq \phi$ پس عنصر α وجود دارد بطوریکه $\alpha \in A$ • حال نشان می‌دهیم که $B = C$ •

$$b \in B \Longleftrightarrow (\alpha, b) \in A \times B \Longleftrightarrow (\alpha, b) \in A \times C \Longleftrightarrow b \in C$$

پس $B = C$ بتعادل $(\alpha, b) \in A \times B \Longleftrightarrow (\alpha, b) \in A \times C$ بعلت تساوی

$A \times B = A \times C$ برقرار است •

ج)

$$(x,y)\in A\times(B\cup C)\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\Longleftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Longleftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

پس $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

د)

$$(x,y)\in A\times(B\cap C)\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap C\Longleftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$$

$$\Longleftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times C$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

پس $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ۰

هـ)

$$(x,y)\in A\times(B-C)\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in B-C\Longleftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin C)$$

$$\Longleftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$$

پس $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$ ۰

و) میخواهیم تساوی $A\times\bigcup\mathcal{B}=\bigcup\{A\times Y\mid Y\in\mathcal{B}\}$ را نشان دهیم ۰

$$(x,y)\in A\times\bigcup\mathcal{B}\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in\bigcup\mathcal{B}\Longleftrightarrow x\in A\wedge\exists Y(Y\in\mathcal{B}\wedge y\in Y)$$

$$\Longleftrightarrow\exists Y(Y\in\mathcal{B}\wedge x\in A\wedge y\in Y)$$

$$\Longleftrightarrow\exists Y(Y\in\mathcal{B}\wedge(x,y)\in A\times Y)$$

$$\Longleftrightarrow(x,y)\in\bigcup\{A\times Y\mid Y\in\mathcal{B}\}$$

بنابراین تساوی فوق برقرار است ۰ در اینجا توجه کنید که $\bigcup\{A\times Y\mid Y\in\mathcal{B}\}$

را می‌توان با نماد $\bigcup_{y\in B}(A\times y)$ نیز نمایش داد .

۲- (الف) فرض کنیم $A=\{۱\}$ و $B=\{۲\}$. در اینصورت $A\times B=\{(۱و۲)\}$ و $B\times A=\{(۲,۱)\}$. پس در این مثال $A\times B\neq B\times A$. بنابراین مجموعه های A و B در این مثال یک مثال ناقض برای تساوی $A\times B=B\times A$ می باشند .

(ب) فرض کنیم $A=\{۱\}$ ، $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$. در اینصورت داریم :

$$A\cup C=\{۱و۳\} \text{ و } A\cup B=\{۱و۲\} \text{ و } B\times C=\{(۲و۳)\}$$

و در نتیجه داریم:

$$(A\cup B)\times(A\cup C)=\{(۱و۱)و(۱و۳)و(۲و۱)و(۲و۳)\} \text{ و } A\cup(B\times C)=\{۱و(۲و۳)\}$$

پس در این مثال $A\cup(B\times C)\neq(A\cup B)\times(A\cup C)$. بنابراین مجموعه‌های A ، B و C این مثال یک مثال ناقض برای تساوی $A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$

می‌باشند .

۳- فرض کنیم $A\neq\phi$ و $B\neq\phi$ نشان می دهیم که :

$$A\times B=B\times A\Longleftrightarrow A=B$$

اگر $A=B$ آنگاه روشن است که $A\times B=B\times A$. حال فرض کنیم $A\times B=B\times A$. چون $A\neq\phi$ و $B\neq\phi$ پس عناصر a و b وجود دارند بطوریکه $a\in A$ و $b\in B$. حال داریم:

$$x\in A\Longrightarrow(x,b)\in A\times B\Longrightarrow(x,b)\in B\times A\Longrightarrow x\in B$$

و

$$x\in B\Longrightarrow(a,x)\in A\times B\Longrightarrow(a,x)\in B\times A\Longrightarrow x\in A$$

پس $A=B$. بنابراین یک شرط لازم و کافی برای اینکه تساوی $A\times B=B\times A$

برقرار باشد این است که تساوی $A = B$ برقرار باشد .

٢-١-١٦

(الف) چون $A \neq B$ پس عنصر x وجود دارد بطوریکه $x \in A$ و $x \notin B$ یا $x \in B$ و $x \notin A$. فرض کنیم $x \in A$ و $x \notin B$. نشان میدهیم $B = \phi \iff A \times B = B \times A$. اگر $B = \phi$ آنگاه $A \times B = \phi$ و $B \times A = \phi$ و در نتیجه $A \times B = B \times A$. حال فرض کنیم $A \times B = B \times A$. اگر $B \neq \phi$ آنگاه عنصر b وجود دارد بطوریکه $b \in B$. پس داریم:

$$x \in A \wedge b \in B \Longrightarrow (x, b) \in A \times B \Longrightarrow (x, b) \in B \times A \Longrightarrow x \in B$$

که یک تناقض است زیرا که $x \notin B$. پس $B = \phi$. بطریق مشابه می توان نشان داد که اگر $x \in B$ و $x \notin A$ آنگاه داریم $A = \phi \iff A \times B = B \times A$.
بنابراین داریم :

$$A \times B = B \times A \iff A = \phi \vee B = \phi$$

(ب) اگر هرکدام از مجموعه های A ، B یا C مساوی تهی باشد آنگاه $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$ هردو مساوی تهی می شوند ودر نتیجه $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
حال فرض کنیم که تساوی $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ برقرار است . فرض کنیم $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ و $C \neq \phi$. در اینصورت عناصر a ، b و c وجود دارند بطوریکه $a \in A$ ، $b \in B$ و $c \in C$. حال داریم:

$$a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \Longrightarrow a \in A \wedge (b, c) \in B \times C$$
$$\Longrightarrow (a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$$

و

$$a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \Longrightarrow (a, b) \in A \times B \wedge \in C$$
$$\Longrightarrow ((a, b), c) \in (A \times B) \times C$$

ولی $(a, (b, c)) \notin (A \times B) \times C$ و $((a, b), c) \notin A \times (B \times C)$ و در نتیجه $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ که یک تناقض است پس $A = \phi$ یا $B = \phi$ یا $C = \phi$. بنابراین داریم :

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)\Longleftrightarrow A=\phi \vee B=\phi \vee C=\phi$$

(ج) اگر $A=\phi$ یا $B=\phi$ آنگاه $A\times B=\phi$. فرض کنیم $A\times B=\phi$ و $A\neq\phi$ و $B\neq\phi$. در اینصورت عناصر a و b وجود دارند بطوریکه $a\in A$ و $b\in B$ و در نتیجه $(a,b)\in A\times B$. پس $A\times B\neq\phi$ که یک تناقض است . پس $A=\phi$ یا $B=\phi$. بنابراین داریم:

$$A\times B=\phi\Longleftrightarrow A=\phi\vee B=\phi$$

۲-۱-۱۸

(الف) اگر $A=B$ آنگاه روشن است که $A^n=B^n$. فرض کنیم $A^n=B^n$. نشان دهیم که $A=B$.

$$x\in A\Longleftrightarrow(x,\dots,x)\in A^n\Longleftrightarrow(x,\dots,x)\in B^n\Longleftrightarrow x\in B$$

پس $A=B$. بنابراین تعادل $A^n=B^n\Longleftrightarrow A=B$ برقرار است .

(ب) اگر $A=\phi$ آنگاه روشن است که $A^n=\phi$. فرض کنیم $A^n=\phi$. اگر $A\neq\phi$ آنگاه عنصر a وجود دارد بطوریکه $a\in A$ و در نتیجه $(a,\dots,a)\in A^n$. پس $A^n\neq\phi$ که یک تناقض است . پس $A=\phi$. بنابراین تعادل $A^n=\phi\Longleftrightarrow A=\phi$ برقرار است.

۲-۲-۳

(الف) فرض کنیم ϕ یک رابطه نیست . در اینصورت عنصر x وجود دارد بطوریکه x یک زوج مرتب نیست . و $x\in\phi$ ولی $x\in\phi$ یک تناقض است . پس ϕ یک رابطه است. بنابراین این جمله درست است.

(ب) چون $1\in A$ و ۱ یک زوج مرتب نیست پس A یک رابطه نیست . بنابراین این جمله غلط است .

(ج) چون $1 \in A$ و ۱ یك زوج مرتب نیست پس A یك رابطه نیست • بنابراین این جمله غلط است•

(د) چون هرعنصر $\mathbb{R}^2$ یك زوج مرتب با مؤلفه های حقیقی است پس $\mathbb{R}^2$ یك رابطه است • بنابراین این جمله درست است •

۲-۲-۷

(ب) $x \in dom\, R \implies \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1)$

چون $y \in \mathbb{R}$ پس $y^2 \geqslant 0$ و درنتیجه $x^2 = 1 - y^2 \leqslant 1$ • پس $-1 \leqslant x \leqslant 1$

و درنتیجه $x \in [-1, 1]$ • برعکس اگر $x \in [-1, 1]$ آنگاه $-1 \leqslant x \leqslant 1$ و در نتیجه $x^2 \leqslant 1$ • پس $1 - x^2 \geqslant 0$ و اگر $y = \sqrt{1 - x^2}$ آنگاه $y \in \mathbb{R}$ و $x^2 + y^2 = 1$ و درنتیجه $x \in dom\, R$ • بنابراین داریم:

$$dom\, R = ran\, R = [-1, 1]$$

(ج) حل این تمرین نیز مشابه حل فوق است •

۲-۲-۸

فرض کنیم R یك رابطه باشد • در اینصورت داریم:

$$(x, y) \in R \implies x \in dom\, R \wedge y \in ran\, R \implies (x, y) \in dom\, R \times ran\, R$$

پس $R \subseteq dom\, R \times ran\, R$ • برعکس اگر $R \subseteq dom\, R \times ran\, R$ آنگاه همه عناصر R زوجهای مرتب هستند بطوریکه مؤلفه اول آنها در $dom\, R$ و مؤلفه دوم آنها در $ran\, R$ می‌باشند • پس R یك رابطه است • بنابراین R یك رابطه است اگر و فقط اگر $R \subseteq dom\, R \times ran\, R$ •

۲-۲-۱۰

فرض کنیم R یک رابطه از A به B باشد ، در اینصورت $R \subseteq A \times B$ ، پس داریم :

$$x \in dom\, R \Longrightarrow \exists y\big((x,y) \in R\big) \Longrightarrow (x,y) \in A \times B \Longrightarrow x \in A$$

بنابراین $dom\, R \subseteq A$ ، بطریق مشابه می توان نشان داد که $ran\, R \subseteq B$ ، بر عکس اگر $dom\, R \subseteq A$ و $ran\, R \subseteq B$ آنگاه چون $R \subseteq dom\, R \times ran\, R \subseteq A \times B$ پس R یک رابطه از A به B است ، بنابراین R یک رابطه از A به B است اگر و فقط اگر $dom\, R \subseteq A$ و $ran\, R \subseteq B$ ،

۲-۲-۱٤

(الف) $dom\, R = \{\alpha, \phi, \Delta, \circ\}$ و $ran\, R = \{1, \phi, \{\phi\}, \circ, \Delta\}$

(ب) $dom\, R = \mathbb{R}$ و $ran\, R = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant \circ\}$

(ج) $dom\, R = \mathbb{Z}$ و $ran\, R = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geqslant \circ\}$

(د) $dom\, R = \mathbb{Z}$ و $ran\, R = \mathbb{Z}$

۲-۲-۱۵

(الف)

$$y \in dom\, R^{-1} \Longleftrightarrow \exists x\big((y,x) \in R^{-1}\big) \Longleftrightarrow \exists x\big((x,y) \in R\big) \Longleftrightarrow y \in ran\, R$$

بنابراین $dom\, R^{-1} = ran\, R$ ، بطریق مشابه می توان نشان داد که $ran\, R^{-1} = dom\, R$ ،

(ب)

$$(x,y) \in (R^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow (y,x) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (x,y) \in R$$

پس $(R^{-1})^{-1} = R$ ،

ج)
$$(y,x)\in(R\cup S)^{-1}\Longleftrightarrow(x,y)\in R\cup S\Longleftrightarrow(x,y)\in R\vee(x,y)\in S$$
$$\Longleftrightarrow(y,x)\in R^{-1}\vee(y,x)\in S^{-1}\Longleftrightarrow(y,x)\in R^{-1}\cup S^{-1}$$
پس $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$. بطریق مشابه می توان نشان داد که $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

۲-۲-۱۸

الف)
$$R|A=\{(۱,۱),(۱,۵),(\alpha,۶)\}$$
ب)
$$R|A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge x=y\}$$
ج)
$$R|A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x>0\wedge xy=1\}$$

۲-۲-۲۰

الف)
$$(x,y)\in R|(A\cup B)\Longleftrightarrow(x,y)\in R\wedge x\in A\cup B$$
$$\Longleftrightarrow(x,y)\in R\wedge(x\in A\vee x\in B)$$
$$\Longleftrightarrow\big((x,y)\in R\wedge x\in A\big)\vee\big((x,y)\in R\wedge x\in B\big)$$
$$\Longleftrightarrow(x,y)\in R|A\vee(x,y)\in R|B$$
$$\Longleftrightarrow(x,y)\in(R|A)\cup(R|B)$$

پس $R|(A\cup B)=(R|A)\cup(R|B)$.

ب) اثبات مشابه اثبات بند (الف) است.

ج) فرض کنیم $\phi|A\neq\phi$. در اینصورت زوج مرتب (x,y) وجود دارد بطوریکه $(x,y)\in\phi|A$. پس $(x,y)\in\phi$ و $x\in A$ ولی $(x,y)\in\phi$ متناقض است. پس $\phi|A=\phi$.

(د) فرض کنیم $R|\phi \neq \phi$ ، در اینصورت زوج مرتب (x, y) وجود دارد بطوریکه $(x,y) \in R|\phi$ ، پس $(x,y) \in R$ و $x \in \phi$ ولی $x \in \phi$ یک تناقض است .

پس $R|\phi = \phi$.

۲-۲-۲۳

(الف)

$$y \in R[A] \Longleftrightarrow \exists x(x \in A \wedge (x,y) \in R) \Longleftrightarrow \exists x((x,y) \in R|A) \Longleftrightarrow y \in ran(R|A)$$

پس $R[A] = ran(R|A)$.

(ب)

$$y \in R[A \cup B] \Longrightarrow \exists x(x \in A \cup B \wedge (x,y) \in R) \Longrightarrow \exists x((x \in A \vee x \in B) \wedge (x,y) \in R)$$

$$\Longrightarrow \exists x((x \in A \wedge (x,y) \in R) \vee (x \in B \wedge (x,y) \in R))$$

$$\Longrightarrow y \in R[A] \vee y \in R[B]$$

$$\Longrightarrow y \in R[A] \cup R[B]$$

$$y \in R[A] \cup R[B] \Longrightarrow y \in R[A] \vee y \in R[B]$$

$$\Longrightarrow \exists x(x \in A \wedge (x,y) \in R) \vee \exists x'(x' \in B \wedge (x',y) \in R)$$

$$\Longrightarrow \exists x(x \in A \cup B \wedge (x,y) \in R) \vee \exists x'(x' \in A \cup B \wedge (x',y) \in R)$$

$$\Longrightarrow y \in R|(A \cup B) \vee y \in R|(A \cup B)$$

$$\Longrightarrow y \in R|(A \cup B)$$

بنابراین $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.

(ج)

$$y \in R[A \cap B] \Longrightarrow \exists x(x \in A \cap B \wedge (x,y) \in R)$$

$$\Longrightarrow \exists x((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x,y) \in R)$$

$$\Longrightarrow \exists x((x \in A \wedge (x,y) \in R) \wedge (x \in B \wedge (x,y) \in R))$$

$$\Longrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$$

$$\Longrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$$

پس $R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$.

حال فرض کنیم $R=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۳)\}$، $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$.

در اینصورت $A\cap B=\{۲\}$ و داریم:

$$R[A\cap B]=\{۲\}\text{ و }R[A]=\{۲,۳\}\text{ و }R[B]=\{۲,۳\}$$

و در نتیجه $R[A]\cap R[B]=\{۲,۳\}$. در این مثال ملاحظه می‌شود که

$R[A\cap B]\neq R[A]\cap R[B]$.

(د)

$$y\in R[A]-R[B]\Longrightarrow y\in R[A]\wedge y\notin R[B]$$
$$\Longrightarrow \exists x(x\in A\wedge(x,y)\in R)\wedge\nexists x'(x'\in B\wedge(x',y)\in R)$$
$$\Longrightarrow \exists x(x\in A\wedge(x,y)\in R)\wedge\forall x'((x',y)\in R\Rightarrow x'\notin B)$$
$$\Longrightarrow x\in A\wedge(x,y)\in R\wedge x\notin B$$
$$\Longrightarrow x\in A-B\wedge(x,y)\in R$$
$$\Longrightarrow y\in R[A-B]$$

پس $R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$. همان مثالی که در قسمت آخر حل بند (ج) ارائه شد یک مثال ناقض برای تساوی $R[A]-R[B]=R[A-B]$ می‌باشد.

(هـ)

$$y\in R[A]\Rightarrow\exists x(x\in A\wedge(x,y)\in R)\Rightarrow\exists x(x\in B\wedge(x,y)\in R)\Rightarrow y\in R[B]$$

پس $R[A]\subseteq R[B]$.

(و) فرض کنیم $\Phi[A]\neq\Phi$. در اینصورت عنصر y وجود دارد بطوریکه $y\in\Phi[A]$.

پس $x\in A$ وجود دارد بطوریکه $(x,y)\in\Phi$. ولی $(x,y)\in\Phi$ یک

تناقض است . پس $\phi[A]=\phi$.

(ز) فرض کنیم $R[\phi]\neq\phi$. در اینصورت عنصر y وجود دارد بطوریکه $y\in R[\phi]$.

پس $x\in\phi$ وجود دارد بطوریکه $(x,y)\in R$ ولی $x\in\phi$ یک تناقض است.

پس $R[\phi]=\phi$.

۲-۲-۲۶

(الف)
$$R\circ S=\{(۳,۱),(۳,۲)\}$$
و
$$S\circ R=\{(۱,٦),(\alpha,۱)\}$$

(ب)
$$R\circ S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge y=|x^{۳}|\}$$
و
$$S\circ R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge y=|x|^{۳}\}$$

در اینجا ملاحظه می‌شودکه $R\circ S=S\circ R$ زیراکه $|x^{۳}|=|x|^{۳}$.

(ج)
$$R\circ S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x\neq y\}$$
و
$$S\circ R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x\neq y\}$$

۲-۲-۲۷

(الف)
$$(x,z)\in R\circ S\Longrightarrow\exists y((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)\Longrightarrow x\in dom\,S\wedge z\in ran\,R$$
$$\Longrightarrow(x,z)\in dom\,S\times ran\,R$$

بنابراین $R\circ S\subseteq dom\,S\times ran\,R$.

ب)

$$R\circ S\neq\phi\Longleftrightarrow\exists x\exists z((x,z)\in R\circ S)\Longleftrightarrow\exists x\exists z\exists y((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longleftrightarrow\exists y(y\in ran\,S\wedge y\in dom\,R)\Longleftrightarrow\exists y(y\in dom\,R\cap ran\,S)\Longleftrightarrow dom\,R\cap ran\,S\neq\phi$$

پس $dom\ R\cap ran\ S\neq\Phi \Longleftrightarrow R\circ S\neq\phi$.

ج)

$$(x,z)\in R\circ(S\cup T)\Longrightarrow\exists((x,y)\in S\cup T\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longrightarrow\exists y(((x,y)\in S\vee(x,y)\in T)\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longrightarrow\exists y(((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)\vee((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R))$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in R\circ S\vee(x,z)\in R\circ T$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$$

$$(x,z)\in(R\circ S)\cup(R\circ T)\Longrightarrow(x,z)\in R\circ S\vee(x,z)\in R\circ T$$

$$\Longrightarrow\exists y((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)\vee\exists y'((x,y')\in T\wedge(y',z)\in R)$$

$$\Longrightarrow\exists y((x,y)\in S\cup T\wedge(y,z)\in R)\vee\exists y'((x,y')\in S\cup T\wedge(y',z)\in R)$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in R\circ(S\cup T)\vee(x,z)\in R\circ(S\cup T)$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in R\circ(S\cup T)$$

پس $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

د)

$$(x,z)\in(R\cup S)\circ T\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\cup S\big)$$

$$\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in T\wedge((y,z)\in R\vee(y,z)\in S)\big)$$

$$\Longrightarrow\exists y\big(((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R)\vee((x,y)\in T\wedge(y,z)\in S)\big)$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in R\circ T\vee(x,z)\in S\circ T$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in(R\circ T)\cup(S\circ T)$$

$$(x,z)\in(R\circ T)\cup(S\circ T)\Longrightarrow(x,z)\in R\circ T\vee(x,z)\in S\circ T$$

$$\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\big)\vee\exists y'\big((x,y')\in T\wedge(y',z)\in S\big)$$

$$\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\cup S\big)\vee\exists y'\big((x,y')\in T\wedge(y',z)\in R\cup S\big)$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in(R\cup S)\circ T\vee(x,z)\in(R\cup S)\circ T$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in(R\cup S)\circ T$$

پس $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$.

هـ)

$$(x,z)\in R\circ(S\cap T)\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in S\cap T\wedge(y,z)\in R\big)$$

$$\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in S\wedge(x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\big)$$

$$\Longrightarrow\exists y\big(((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)\wedge((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R)\big)$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in R\circ S\wedge(x,z)\in R\circ T$$

$$\Longrightarrow(x,z)\in(R\circ S)\cap(R\circ T)$$

پس $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$.

فرض کنیم $R=\{(۱,۴),(۲,۲),(۱,۳)\}$ ، $S=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$

و $T=\{(2,3),(2,4),(3,3)\}$. دراینصورت $S\cap T=\{(2,3)\}$ وداریم:

$R\circ(S\cap T)=\{(2,1)\}$ و $R\circ S=\{(1,2),(2,1),(3,1)\}$ و $R\circ T=\{(2,1),(3,1)\}$

و درنتیجه $(R\circ S)\cap(R\circ T)=\{(2,1),(3,1)\}$. در این مثال ملاحظه می‌شود که

$R\circ(S\cap T)\neq(R\circ S)\cap(R\circ T)$.

و)
$$(x,z)\in(R\cap S)\circ T\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\cap S\big)$$
$$\Longrightarrow\exists y\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\wedge(y,z)\in S\big)$$
$$\Longrightarrow\exists y\Big(\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R\big)\wedge\big((x,y)\in T\wedge(y,z)\in S\big)\Big)$$
$$\Longrightarrow(x,z)\in R\circ T\wedge(x,z)\in S\circ T$$
$$\Longrightarrow(x,z)\in(R\circ T)\cap(S\circ T)$$

پس $(R\cap S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cap(S\circ T)$.

فرض کنیم $R=\{(1,2),(1,3)\}$، $S=\{(1,2),(2,3)\}$ و $T=\{(2,1),(2,2)\}$.

دراینصورت $R\cap S=\{(1,2)\}$ و درنتیجه داریم:

$(R\cap S)\circ T=\{(2,2)\}$ و $R\circ T=\{(2,2),(2,3)\}$ و $R\circ S=\{(2,2),(2,3)\}$

پس $(R\circ T)\cap(R\circ S)=\{(2,2),(2,3)\}$ و درنتیجه $(R\cap S)\circ T\neq(R\circ T)\cap(R\circ S)$.

۲-۲-۲۹

(الف)
$$(z,x)\in(R\circ S)^{-1}\Longleftrightarrow(x,z)\in R\circ S\Longleftrightarrow\exists y\big((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R\big)$$
$$\Longleftrightarrow\exists y\big((y,x)\in S^{-1}\wedge(z,y)\in R^{-1}\big)\Longleftrightarrow(z,x)\in S^{-1}\circ R^{-1}$$

پس $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

ب)

$$(x,z)\in(R\circ S)|A \Longleftrightarrow (x\in A\wedge(x,z)\in R\circ S)$$

$$\Longleftrightarrow \exists y(x\in A\wedge(x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longleftrightarrow \exists y((x,y)\in S|A\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longleftrightarrow (x,z)\in R\circ(S|A)$$

پس $(R\circ S)|A=R\circ(S|A)$.

ج)

$$(x,z)\in R\circ T \Longrightarrow \exists y((x,y)\in T\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longrightarrow \exists y((x,y)\in T\wedge(y,z)\in S)$$

$$\Longrightarrow (x,y)\in S\circ T$$

پس $R\circ T\subseteq S\circ T$ بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $T\circ R\subseteq T\circ S$.

د)

$$z\in(R\circ S)[A] \Longleftrightarrow \exists x(x\in A\wedge(x,z)\in R\circ S)$$

$$\Longleftrightarrow \exists x\exists y(x\in A\wedge(x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longleftrightarrow \exists y(y\in S[A]\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longleftrightarrow z\in R[S[A]]$$

پس $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

هـ)

$$x\in dom(R\circ S) \Longleftrightarrow \exists z((x,z)\in R\circ S)$$

$$\Longleftrightarrow \exists z\exists y((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R)$$

$$\Longleftrightarrow \exists y((y,x)\in S^{-1}\wedge y\in dom R)$$

$$\Longleftrightarrow x\in S^{-1}[dom R]$$

پس $\operatorname{dom}(R\circ S)=S^{-1}[\operatorname{dom}R]$.

(هـ)

$$x\in \operatorname{dom}(R\circ S)\Longleftrightarrow \exists z((x,z)\in R\circ S)$$
$$\Longleftrightarrow \exists z\,\exists y((x,y)\in S\wedge (y,z)\in R)$$
$$\Longleftrightarrow \exists y((y,x)\in S^{-1}\wedge y\in \operatorname{dom}R)$$
$$\Longleftrightarrow x\in S^{-1}[\operatorname{dom}R]$$

پس $\operatorname{dom}(R\circ S)=S^{-1}[\operatorname{dom}R]$.

(و)

$$z\in \operatorname{ran}(R\circ S)\Longleftrightarrow \exists x((x,z)\in R\circ S)$$
$$\Longleftrightarrow \exists x\,\exists y((x,y)\in S\wedge (y,z)\in R)$$
$$\Longleftrightarrow \exists y(y\in \operatorname{ran}S\wedge (y,z)\in R)$$
$$\Longleftrightarrow z\in R[\operatorname{ran}S]$$

پس $\operatorname{ran}(R\circ S)=R[\operatorname{ran}S]$.

۲-۲-۳۲

(الف)

R	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	0	0	0
c	0	0	0	1
d	0	0	0	0

(ب)

S	a	b	c	d
a	۰	۰	۰	۰
b	۰	۱	۱	۰
c	۰	۱	۰	۰
d	۰	۰	۰	۰

(ج)

T	a	b	c	d
a	۰	۱	۰	۱
b	۰	۰	۰	۰
c	۰	۰	۰	۰
d	۱	۱	۰	۰

۲-۲-۳۳

R	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۳	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۴	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰
۵	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۶	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۷	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۸	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۹	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

(الف) خیر ، زیرا که مثلاً $(۷,۷)\notin R$ یا مثلاً $(۹,۹)\notin R$

(ب) بلی ، زیرا که داریم :

$$(x,y)\in R \Longrightarrow x+y<۱۴ \Longrightarrow y+x<۱۴ \Longrightarrow (y,x)\in R$$

(ج) خیر ، زیراکه مثلاً $(۷,۳)\in R$ و $(۳,۷)\in R$ درحالیکه $(۷,۷)\notin R$.

حل مسائل فصل ۳

۳-۱-۳

(الف)
$$(x,y),(x,z)\in R \Longrightarrow y=|x| \wedge z=|x| \Longrightarrow y=z$$

پس R یك تابع است .

(ب)
$$(x,y),(x,z)\in R \Longrightarrow y=x \wedge z=x \Longrightarrow y=z$$

پس R یك تابع است.

(ج) ملاحظه می‌شود که $(۱,۲)\in R$ و $(۱,۳)\in R$ ولی $۳ \neq ۲$. پس R یك تابع نیست .

(د)
$$(x,y),(x,z)\in R \Longrightarrow x\geqslant 0 \wedge y=\sqrt{x} \wedge z=\sqrt{x} \Longrightarrow y=z$$

پس R یك تابع است.

۳-۱-۱۱

(الف)
$$f\circ g:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x}{۲}\right)=\left|\frac{x}{۲}\right|=\frac{|x|}{۲}$$
$$g\circ f:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(|x|)=\frac{|x|}{۲}$$

ملاحظه می‌شود که در اینجا $f\circ g = g\circ f$.

(ب)

$$f\circ g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^{2}+1)=\frac{1}{x^{2}+1}$$
$$g\circ f:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2}}+1=\frac{1+x^{2}}{x^{2}}$$

ملاحظه می‌شود که در اینجا $f\circ g\neq g\circ f$ •

٣-١-١٤

(الف) فرض کنیم که f دارای یک معکوس راست مانند g است پس g یک تابع از B به A است بطوریکه $f\circ g=i_{B}$ • پس $(f\circ g)(c)=c$ چون $g:B\rightarrow A$ پس $g(c)=1$ یا $g(c)=2$ • اگر $g(c)=1$ آنگاه $f(g(c))=f(1)=a$ و در نتیجه $(f\circ g)(c)=a$ که یک تناقض است • اگر $g(c)=2$ آنگاه $f(g(c))=f(2)=b$ و در نتیجه $(f\circ g)(c)=b$ که دوباره یک تناقض است• پس در هر حالت یک تناقض بدست می‌آید و در نتیجه f دارای معکوس راست نیست •

(ب) فرض کنیم که f دارای یک معکوس چپ مانند g است • پس g یک تابع از B به A است بطوریکه $g\circ f=i_{A}$ • بنابراین داریم :

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=1,\ (g\circ f)(2)=g(f(2))=2,\ (g\circ f)(3)=g(f(3))=3$$

و در نتیجه داریم: $g(a)=1,\ g(b)=2,\ g(b)=3$

ولی $g(b)=2$ و $g(b)=3$ یک تناقض به تابع بودن g است • بنابراین چنین تابعی وجود ندارد ، یعنی f دارای معکوس چپ نیست•

٣-١-٢١

(الف)

$$dom\,f=\{x\mid\exists y\,(y\in ran\,f\wedge(x,y)\in f)\}$$
$$=\{x\mid\exists y\,(y\in ran\,f\wedge y=f(x)\}$$

(ب)

$$ran\,f=\{y\mid\exists x(x\in dom\,f\wedge(x,y)\in f)\}$$
$$=\{y\mid\exists x(x\in dom\,f\wedge y=f(x))\}$$
$$=\{f(x)\mid x\in dom\,f\}$$

۳-۱-۲۲

(الف) چون $f^{-1}\circ f=i_A$ و $f\circ f^{-1}=i_B$ پس f یک معکوس f^{-1} می باشد و در نتیجه f^{-1} معکوس پذیر است و در واقع $(f^{-1})^{-1}=f$

(ب) داریم که $f^{-1}\circ f=i_A$، $f\circ f^{-1}=i_B$ و $g^{-1}\circ g=i_B$، $g\circ g^{-1}=i_C$.

در اینصورت خواهیم داشت :

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}=g\circ i_B\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=i_C$$

و

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f=f^{-1}\circ i_B\circ f=f^{-1}\circ f=i_A$$

پس $f^{-1}\circ g^{-1}$ یک معکوس $g\circ f$ می باشد و در نتیجه $g\circ f$ معکوس‌پذیر است و در واقع $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

۳-۲-۶

(الف) فرض کنیم $b,b'\in B$ و $g(b)=g(b')$. در اینصورت داریم :

$$\{x\mid x\in A\wedge f(x)=b\}=\{x\mid x\in A\wedge f(x)=b'\}$$

چون f پوشاست پس $\alpha,\alpha'\in A$ وجود دارند بطوریکه $f(\alpha)=b$ و $f(\alpha')=b'$.

چون $f(\alpha)=b$ پس $\alpha\in\{x\mid x\in A\wedge f(x)=b\}$ و در نتیجه $\alpha\in\{x\mid x\in A\wedge f(x)=b'\}$. پس $f(\alpha)=b'$ بنابراین

$b = f(\alpha) = b'$ و در نتیجه g یک بیک است.

عکس این مطلب در حالت عمومی درست نیست . یعنی g می‌تواند یک بیک باشد بدون اینکه f پوشا باشد . مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد .

فرض کنیم $A = \{۱،۲\}$ و $B = \{۳،۴\}$ و $f : A \longrightarrow B$ بصورت $f(۱) = ۳$ و $f(۲) = ۳$ تعریف شده باشد . ملاحظه می‌شود که f پوشانیست.

در اینصورت $\mathcal{P}(A) = \{\phi \{۱\}, \{۲\}, \{۱،۲\}\}$ تابع g از B به $\mathcal{P}(A)$ بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$g(۳) = \{۱،۲\} \text{ و } g(۴) = \phi$$

ملاحظه می‌شود که g یک تابع یک بیک است درحالیکه f پوشانیست .

(ب) ابتدا نشان می‌دهیم که چون f و g یک بیک هستند پس h نیز یک بیک است .

$$h(x, y) = h(x', y') \Longrightarrow (f(x), g(y)) = (f(x'), g(y'))$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(x') \wedge g(y) = g(y')$$

$$\Longrightarrow x = x' \wedge y = y'$$

$$\Longrightarrow (x, y) = (x', y')$$

پس h یک بیک است . حال نشان می‌دهیم که چون f و g پوشا هستند پس h نیز پوشاست .

$$(b, d) \in B \times D \Longrightarrow b \in B \wedge d \in D$$

$$\Longrightarrow \exists a (a \in A \wedge b = f(a)) \wedge \exists c (c \in C \wedge d = g(c))$$

$$\Longrightarrow \exists a, c (a \in A \wedge c \in C \wedge b = f(a) \wedge d = g(c))$$

$$\Longrightarrow \exists(a,c)\big((a,c)\in A\times C \wedge (b,d)=(f(a),g(c))\big)$$

$$\Longrightarrow \exists(a,c)\big((a,c)\in A\times C \wedge (b,d)=h(a,c)\big)$$

پس h پوشاست • بنابراین از دو سویی بودن f و g دوسویی بودن h نتیجه می‌شود •

(ج) ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $g\circ f$ یک بیک باشد آنگاه f یک بیک است •

$$f(x)=f(x')\Rightarrow g(f(x))=g(f(x'))\Rightarrow(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')\Rightarrow x=x'$$

پس f یک بیک است • حال نشان می‌دهیم که اگر $g\circ f$ پوشا باشدآنگاه g پوشاست.

$$c\in C\Longrightarrow\exists a\big(a\in A\wedge(g\circ f)(a)=c\big)\Longrightarrow\exists a\big(a\in A\wedge g(f(a))=c\big)$$

پس اگر $b=f(a)\in B$ آنگاه $g(b)=c$ و در نتیجه g پوشاست •

فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$ ، $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۶,۷\}$ • تابع f از A به B وتابع g از B به C را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(۱)=۳,\ f(۲)=۴,\ g(۳)=g(۴)=۶,\ g(۵)=۷$$

ملاحظه می‌شود که f یک بیک و g پوشاست • در اینصورت تابع $g\circ f$ از A به C بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$(g\circ f)(۱)=g(f(۱))=g(۳)=۶,\ (g\circ f)(۲)=g(f(۲))=g(۴)=۶$$

ملاحظه می‌شود که $g\circ f$ دوسویی نیست •

۳-۲-۷

(الف) ϕ تنها تابع از ϕ به B است • زیرا که ϕ یک رابطه از ϕ به B است وبعلاوه چون ϕ عنصر ندارد دو زوج مرتب با مؤلفه های اول مساوی و مؤلفه های دوم نامساوی در ϕ نخواهیم داشت • بنابراین ϕ یک تابع از ϕ به B است و روشن است که تنها تابع نیز می‌باشد •

(ب) اگر $A \neq \phi$ و $B=\phi$ آنگاه تابعی از A به B وجود ندارد ، زیرا که اگر f چنین تابعی باشد آنگاه چون $A \neq \phi$ پس $\alpha \in A$ وجود دارد و در نتیجه $f(\alpha) \in B$ که یک تناقض است زیرا که $B=\phi$. پس تابعی از A به B وجود ندارد .

<u>۳-۲-۹</u>

(الف) فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳\}$ ، $B=\{۴,۵\}$ و تابع f از A به B بصورت زیر باشد :

$$f(۱)=۴,\ f(۲)=۵\ ,\ f(۳)=۵$$

فرض کنیم $X=\{۱,۲\}$ و $X'=\{۳\}$. دراینصورت $X \cap X' = \phi$ و در نتیجه داریم : $f[X']=\{۵\}$ و $f[X]=\{۴,۵\}$ و $f[X \cap X']=\phi$

پس $f[X] \cap f[X']=\{۵\}$. ملاحظه می‌شود که در این مثال $f[X \cap X'] \neq f[X] \cap f[X']$. حال ثابت می‌کنیم که شرط لازم و کافی برای

اینکه تساوی $f[X \cap X']=f[X] \cap f[X']$ برای هردو زیر مجموعه X و X' از A برقرار باشد این است که f یک تابع یک بیک از A به B باشد .

فرض کنیم که $f: A \longrightarrow B$ یک بیک باشد و $X, X' \subseteq A$. نشان می‌دهیم که $f[X \cap X']=f[X] \cap f[X']$. بنابه ۳-۲-۸ (ج) داریم :

$f[X \cap X'] \subseteq f[X] \cap f[X']$. حال ثابت می‌کنیم که $f[X] \cap f[X'] \subseteq f[X \cap X']$.

$$y \in f[X] \cap f[X'] \Longrightarrow y \in f[X] \wedge y \in f[X']$$

$$\Longrightarrow \exists x (x \in X \wedge y=f(x)) \wedge \exists x' (x' \in X' \wedge y=f(x'))$$

$$\Longrightarrow \exists x, x' (x \in X \wedge x' \in X' \wedge y=f(x)=f(x'))$$

چون f یک بیک است و $f(x)=f(x')$ پس $x=x'$ و در نتیجه $x \in X \cap X'$ و

. $y=f(x)$

بنابراین $y\in f[X\cap X']$. پس تساوی $f[X\cap X']=f[X]\cap f[X']$ برقرار است.

برعکس فرض کنیم که تساوی $f[X\cap X']=f[X]\cap f[X']$ برای هردو زیرمجموعه X و X' از A برقرار باشد . نشان می دهیم که f یک بیک است .

$$f(x)=f(x')\Rightarrow\{f(x)\}=\{f(x')\}\Rightarrow f[\{x\}]=f[\{x'\}]\Rightarrow f[\{x\}]\cap f[\{x'\}]\neq\phi$$

بنابه فرض داریم $f[\{x\}\cap\{x'\}]=f[\{x\}]\cap f[\{x'\}]$. پس $\{x\}\cap\{x'\}\neq\phi$ ،

زیرا که در غیر اینصورت $f[\{x\}\cap\{x'\}]=\phi$ که چنین نیست . پس $\{x\}\cap\{x'\}\neq\phi$ و در نتیجه $x=x'$. بنابراین f یک بیک است .

(ب) همان مثالی که در ابتدای بند (الف) ارائه گردید مثال ناقضی برای تساوی $f[X]-f[X']=f[X-X']$ است .

حال نشان می دهیم که برای هردو زیر مجموعه X و X' از A تساوی $f[X]-f[X']=f[X-X']$ برقرار است اگر و فقط اگر تابع $f:A\to B$ یک بیک باشد . فرض کنیم که f یک بیک باشد و $X,X'\subseteq A$. نشان می دهیم که تساوی $f[X]-f[X']=f[X-X']$ برقرار است . بنابه ۸-۲-۲(د) داریم:

$f[X]-f[X']\subseteq f[X-X']$. حال نشان می دهیم که $f[X-X']\subseteq f[X]-f[X']$.

$$y\in f[X-X']\Rightarrow\exists x\,(x\in X-X'\wedge y=f(x))$$

$$\Rightarrow\exists x\,(x\in X\wedge x\notin X'\wedge y=f(x))$$

در اینصورت $f(x)\in f[X]$. همچنین $f(x)\notin f[X']$. زیراکه اگر $f(x)\in f[X']$ آنگاه $f(x)=f(x')$ برای یک $x'\in X'$ چون f یک

بیک است پس $x=x'$ و در نتیجه $x\in X'$ که یک تناقض است • پس

$f(x)\in f[X]$ و $f(x)\notin f[X']$ و در نتیجه $y=f(x)\in f[X]-f[X']$ •

بنابراین $f[X-X']=f[X]-f[X']$ •

برعکس فرض کنیم تساوی $f[X]-f[X']=f[X-X']$ برای هر $X, X'\subseteq A$

برقرار باشد •نشان دهیم که f یک بیک باشد •

$$f(x)=f(x')\Longrightarrow\{f(x)\}=\{f(x')\}\Longrightarrow f[\{x\}]=f[\{x'\}]\Longrightarrow f[\{x\}]-f[\{x'\}]=\phi$$

بنابه فرض داریم $f[\{x\}-\{x'\}]=f[\{x\}]-f[\{x'\}]$ پس $f[\{x\}-\{x'\}]=\phi$

و در نتیجه $\{x\}-\{x'\}=\phi$ •بنابراین $\{x\}=\{x'\}$ و در نتیجه $x=x'$ •

پس f یک بیک است•

ج) نشان می دهیم که $f[\bigcup\mathcal{A}]=\bigcup_{X\in\mathcal{A}}f[X]$ •

$$y\in f[\bigcup\mathcal{A}]\Longleftrightarrow\exists x(x\in\bigcup\mathcal{A}\wedge y=f(x))$$

$$\Longleftrightarrow\exists x\exists X(X\in\mathcal{A}\wedge x\in X\wedge y=f(x))$$

$$\Longleftrightarrow\exists X(X\in\mathcal{A}\wedge y\in f[X])$$

$$\Longleftrightarrow y\in\bigcup_{X\in\mathcal{A}}f[X]$$

پس $f[\bigcup\mathcal{A}]=\bigcup_{X\in\mathcal{A}}f[X]$ •حال نشان می دهیم که $f[\bigcap\mathcal{A}]\subseteq\bigcap_{X\in\mathcal{A}}f[X]$ •

$$y\in f[\bigcap\mathcal{A}]\Longrightarrow\exists x(x\in\bigcap\mathcal{A}\wedge y=f(x))$$

$$\Longrightarrow\exists x\forall X(X\in\mathcal{A}\Longrightarrow x\in X\wedge y=f(x))$$

$$\Longrightarrow\forall X(X\in\mathcal{A}\Longrightarrow y\in f[X])$$

$$\Longrightarrow y \in \bigcap_{X \in \mathcal{A}} f[X]$$

پس $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} f[X] \supseteq f[\bigcap \mathcal{A}]$ ·

۳-۲-۱۱

(الف) نشان می‌دهیم $f^{-1}[\bigcup \mathcal{B}] = \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} f^{-1}[Y]$ ·

$$x \in f^{-1}[\bigcup \mathcal{B}] \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup \mathcal{B} \Longleftrightarrow \exists Y (Y \in \mathcal{B} \wedge f(x) \in Y)$$

$$\Longleftrightarrow \exists Y (Y \in \mathcal{B} \wedge x \in f^{-1}[Y]) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} f^{-1}[Y]$$

پس $f^{-1}[\bigcup \mathcal{B}] = \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} f^{-1}[Y]$. حال نشان می‌دهیم که $f^{-1}[\bigcap \mathcal{B}] = \bigcap_{Y \in \mathcal{B}} f^{-1}[Y]$ ·

$$x \in f^{-1}[\bigcap \mathcal{B}] \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap \mathcal{B} \Longleftrightarrow \forall Y (Y \in \mathcal{B} \Longrightarrow f(x) \in Y)$$

$$\Longleftrightarrow \forall Y (Y \in \mathcal{B} \Longrightarrow x \in f^{-1}[Y]) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{Y \in \mathcal{B}} f^{-1}[Y]$$

پس $f^{-1}[\bigcap \mathcal{B}] = \bigcap_{Y \in \mathcal{B}} f^{-1}[Y]$ ·

(ب) نشان می‌دهیم‌که $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$ ·

$$x \in X \Longrightarrow f(x) \in f[X] \Longrightarrow x \in f^{-1}[f[X]]$$

پس $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$ · حال نشان می‌دهیم که تساوی $X = f^{-1}[f[X]]$

برای هر زیرمجموعه X از A برقرار است اگر و فقط اگر تابع $f: A \to B$ یک بیک باشد ·

فرض کنیم که f یک بیک باشد · بنابه قسمت اول این مساله $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$ ·

نشان می‌دهیم که $f^{-1}[f[X]] \subseteq X$ ·

$$x\in \bar{f}^{1}[f[X]] \Longrightarrow f(x)\in f[X] \Rightarrow \exists x'(x'\in X \wedge f(x)=f(x'))$$

چون f یک بیک است و $f(x) = f(x')$ پس $x = x'$ ود رنتیجه $x \in X$ ۰

بنابراین تساوی $X=\bar{f}^{1}[f[X]]$ برای هر زیر مجموعه X از A برقرار است۰

برعکس فرض کنیم که تساوی $X=\bar{f}^{1}[f[X]]$ برای هر زیرمجموعه X از A برقرار باشد ۰ نشان می دهیم f یک بیک است۰

$$f(x)=f(x')\Longrightarrow \{f(x)\}=\{f(x')\}\Longrightarrow f[\{x\}]=f[\{x'\}]\Rightarrow \bar{f}^{1}[f[\{x\}]]=\bar{f}^{1}[f[\{x'\}]]$$

بنابه فرض $\{x\}=\bar{f}^{1}[f[\{x\}]]$ و $\{x'\}=\bar{f}^{1}[f[\{x'\}]]$ ۰ پس

$\{x\} = \{x'\}$ و در نتیجه $x=x'$. پس f یک بیک است۰

ج)

$$y\in f[\bar{f}^{1}[Y]] \Longrightarrow \exists x(x\in \bar{f}^{1}[Y] \wedge y=f(x)) \Longrightarrow \exists x(f(x)\in Y \wedge y=f(x))$$

$$\Longrightarrow y\in Y$$

$$y\in Y \Longrightarrow y\in ran f \Longrightarrow \exists x\,(y=f(x))$$

پس $f(x)\in Y$ و در نتیجه $x\in\bar{f}^{1}[Y]$. پس $y=f(x)\in f[\bar{f}^{1}[Y]]$ ۰

بنابراین $f[\bar{f}^{1}[Y]]=Y$ ۰

(د) فرض کنیم $f: B\to C$ یک بیک باشد و برای دو تابع g و h از A به B داشته باشیم $f\circ g=f\circ h$ ۰ نشان می دهیم که $g = h$ روشن است که $dom\, g=A=dom\, h$ ۰

فرض کنیم که $x \in A$ ۰ در اینصورت داریم :

$$(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)\Rightarrow f(g(x))=f(h(x)) \xrightarrow{\text{یک بیک } f} g(x)=h(x)$$

پس $g=h$.

برعکس فرض کنیم که برای هر دو تابع g و h تساوی $f\circ g=f\circ h$ نتیجه بدهد $g=h$. نشان می‌دهیم که f یک بیک است. فرض کنیم b و $b'\in B$ و $f(b)=f(b')$. فرض کنیم A یک مجموعه غیر تهی باشد و تعریف می‌کنیم $g:A\longrightarrow B$ و $h:A\longrightarrow B$ بطوریکه $g(x)=b$ و $h(x)=b'$ برای هر $x\in A$. در اینصورت برای هر $x\in A$ داریم:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(b)=f(b')=f(h(x))=(f\circ h)(x)$$

بنابراین $g(x)=h(x)$ برای هر $x\in A$ و بنابه فرض $f\circ g=f\circ h$. پس $g=h$ و در نتیجه $b=b'$. پس f یک بیک است.

(هـ) فرض کنیم $f:A\longrightarrow B$ پوشا باشد و برای دوتابع g و h از B به C داشته باشیم $g\circ f=h\circ f$. نشان می‌دهیم که $g=h$. روشن است که $dom\, g=B=dom\, h$. فرض کنیم که $y\in B$. در اینصورت چون f پوشاست پس $x\in A$ وجود دارد بطوریکه $y=f(x)$. پس داریم :

$$g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x)=h(y)$$

بنابراین $g=h$.

برعکس فرض کنیم که برای هردو تابع g و h تساوی $g\circ f=h\circ f$ نتیجه بدهد $g=h$. نشان می‌دهیم که f پوشاست . فرض کنیم f پوشا نباشد . دراینصورت $ran\, f\neq B$. فرض کنیم که $b\in B-ran\, f$ و $b'\in ran\, f$. در اینصورت $b\neq b'$. حال $g:B\longrightarrow B$ و $h:B\longrightarrow B$ رابصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$g(y)=\begin{cases} x \;\text{اگر}\; y\in ran\, f\wedge y=f(x) \\ b \;\text{اگر}\; y\notin ran\, f \end{cases}$$

و

$$h(y)=\begin{cases} x \;\text{اگر}\; y\in ran\, f\wedge y=f(x) \\ b_0 \;\text{اگر}\; y\notin ran\, f \end{cases}$$

چون $b\neq b'$ پس $g\neq h$. حال برای هر $x\in A$ داریم:

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x=h(f(x))=(h\circ f)(x)$

پس $g\circ f=h\circ f$ و بنابه فرض $g=h$ که یک تناقض است • بنابراین $ran f=B$

و در نتیجه f پوشاست •

٣-٣-٤

نشان می‌دهیم که $\bigcup_{n\in N} A_n=N$ •

$x\in\bigcup_{n\in N} A_n \Longrightarrow \exists n(n\in N\wedge x\in A_n)\Longrightarrow \exists n(n\in N\wedge x\in\{1,\dots,n\})$

چون $\{1,\dots\dots,n\}\subseteq N$ پس $x\in N$. برعکس فرض کنیم $x\in N$. در این

صورت $x\in\{1,\dots,x\}$ و چون $\{1,\dots,x\}\in\mathcal{A}$ پس $x\in\bigcup\mathcal{A}$ یعنی

$x\in\bigcup_{n\in N} A_n$ • بنابراین $\bigcup_{n\in N} A_n=N$ • حال نشان می‌دهیم که $\bigcap_{n\in N} A_n=\{1\}$ •

چون برای هر $X\in\mathcal{A}$ داریم $1\in X$ پس $1\in\bigcap\mathcal{A}$

و در نتیجه $1\in\bigcap_{n\in N} A_n$ •

$x\in\bigcap_{n\in N} A_n\Longrightarrow\forall n(n\in N\Longrightarrow x\in A_n)\Longrightarrow x\in A_1=\{1\}$

بنابراین $\bigcap_{n\in N} A_n=\{1\}$ •

٣-٣-٥

(الف) $\bigcup_{i=1}^{3} A_i=\{1,2,3,4,5,7\}$ ، $\bigcap_{i=1}^{3} A_i=\{2,5\}$

(ب) $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{n} A_i=[0,1]$ ، $\bigcap\mathcal{A}=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=[0,\frac{1}{n}]$

(ج) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\mathbb{Z}$ ، $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{-1,0,1\}$

٦-٣-٣

الف)

$$x\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i\wedge x\in\bigcup_{j\in J}B_j$$

$$\Longleftrightarrow\exists i(i\in I\wedge x\in A_i)\wedge\exists j(j\in J\wedge x\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow\exists i,j(i\in I\wedge j\in J\wedge x\in A_i\wedge x\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow\exists i,j(i\in I\wedge j\in J\wedge x\in A_i\cap B_j)$$

$$\Longleftrightarrow\exists i(i\in I\wedge x\in\bigcup_{j\in J}(A_i\cap B_j))$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i\cap B_j)$$

پس $\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i\cap B_j)$.

ب)

$$x\in\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}A_i\vee x\in\bigcap B_j$$

$$\Longleftrightarrow\forall i(i\in I\Rightarrow x\in A_i)\vee\forall j(j\in J\Rightarrow x\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow\forall i\forall j(i\in I\wedge j\in J\Rightarrow x\in A_i\vee x\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow\forall i\forall j(i\in I\wedge j\in J\Rightarrow x\in A_i\cup B_j)$$

$$\Longleftrightarrow\forall i(i\in I\Rightarrow x\in\bigcap_{j\in J}(A_i\cup B_j))$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\cup B_j)$$

پس $\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\cup B_j)$.

ج)

$$x\in\bigcup_{i\in I}A_i-\bigcup_{j\in J}B_j \Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i\wedge x\notin\bigcup_{j\in J}B_j$$

$$\Longleftrightarrow \exists i\,(i\in I\wedge x\in A_i)\wedge\forall j\,(j\in J\Longrightarrow x\notin B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists i\,\forall j\,(i\in I\wedge j\in J\Longrightarrow x\in A_i\wedge x\notin B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists i\,\forall j\,(i\in I\wedge j\in J\Longrightarrow x\in A_i-B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists i\,\Big(i\in I\wedge x\in\bigcap_{j\in J}(A_i-B_j)\Big)$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i-B_j)$$

پس $\bigcup_{i\in I}A_i-\bigcup_{j\in J}B_j=\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i-B_j)$.

د)

$$x\in\bigcap_{i\in I}A_i-\bigcap_{j\in J}B_j \Longleftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}A_i\wedge x\notin\bigcap_{j\in J}B_j$$

$$\Longleftrightarrow \forall i\,(i\in I\Longrightarrow x\in A_i)\wedge\exists j\in J\wedge x\notin B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \forall i\,\exists j\,(i\in I\wedge j\in J\Longrightarrow x\in A_i\wedge x\notin B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \forall i\,\exists j\,(i\in I\wedge j\in J\Longrightarrow x\in A_i-B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \forall i\,\Big(i\in I\Longrightarrow x\in\bigcup_{j\in J}(A_i-B_j)\Big)$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i-B_j)$$

پس $\bigcap_{i\in I}A_i-\bigcap_{j\in J}B_j=\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i-B_j)$.

(هـ)

$$(x,y)\in\bigcup_{i\in I}A_i\times\bigcup_{j\in J}B_j \Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i\wedge y\in\bigcup_{j\in J}B_j$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i(i\in I\wedge x\in A_i)\wedge\exists_j(j\in J\wedge y\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i\,\exists_j(i\in I\wedge j\in J\wedge x\in A_i\wedge y\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i\,\exists_j\left(i\in I\wedge j\in J\wedge (x,y)\in A_i\times B_j\right)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i\left(i\in I\wedge (x,y)\in\bigcup_{j\in J}(A_i\times B_j)\right)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i\times B_j)$$

پس $\bigcup_{i\in I}A_i\times\bigcup_{j\in J}B_j=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i\times B_j)$.

(و)

$$(x,y)\in\bigcap_{i\in I}A_i\times\bigcap_{j\in J}B_j \Longleftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}A_i\wedge y\in\bigcap_{j\in J}B_j$$

$$\Longleftrightarrow \forall_i(i\in I\Longrightarrow x\in A_i)\wedge\forall_j(j\in J\Longrightarrow y\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \forall_i\forall_j(i\in I\wedge j\in J\Longrightarrow x\in A_i\wedge y\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \forall_i\forall_j\left(i\in I\wedge j\in J\Longrightarrow (x,y)\in A_i\times B_j\right)$$

$$\Longleftrightarrow \forall_i\left(i\in I\Longrightarrow (x,y)\in\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)\right)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y)\in\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)$$

پس $\bigcap_{i\in I}A_i\times\bigcap_{j\in J}B_j=\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)$.

(ز)

$$(x,y)\in\bigcup_{i\in I}A_i\times\bigcap_{j\in J}B_j \Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i\wedge y\in\bigcap_{j\in J}B_j$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i(i\in I\wedge x\in A_i)\wedge\forall_j(j\in J\Rightarrow y\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i\forall_j(i\in I\wedge j\in J\Rightarrow x\in A_i\wedge y\in B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i\forall_j(i\in I\wedge j\in J\Rightarrow (x,y)\in A_i\times B_j)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_i\Big(i\in I\wedge (x,y)\in\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)\Big)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)$$

پس $\bigcup_{i\in I}A_i\times\bigcap_{j\in J}B_j=\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)$.

۳-۳-۸

می‌خواهیم نشان دهیم که $\prod_{i\in I}A_i=\{g\mid g:I\to B\}$.

$$f\in\prod_{i\in I}A_i\Rightarrow f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i\wedge\forall_i(i\in I\Rightarrow f(i)\in A_i)$$

چون برای هر $i\in I$ داریم $A_i=B$ پس $\bigcup_{i\in I}A_i=B$ و در نتیجه $f:I\to B$.

پس $f\in\{g\mid g:I\to B\}$. برعکس فرض کنیم $f\in\{g\mid g:I\to B\}$.

در اینصورت $f:I\to B$ بطوریکه برای هر $i\in I$ داریم $f(i)\in B$ چون

برای هر $i\in I$ $A_i=B$ پس برای هر $i\in I$ $f(i)\in A_i$ بنابراین

$f\in\prod_{i\in I}A_i$. پس $\prod_{i\in I}A_i=\{g\mid g:I\to B\}$

حل مسائل فصل ٤

٤-١-٤

(الف) R_1 انعکاسی نیست زیرا که مثلاً $(a,a) \notin R_1$ متقارن است زیرا که درجدول R_1 ملاحظه می‌شود که ا‌ها نسبت به قطر جدول حالت تقارنی دارند. R_1 انتقالی نیست زیرا که مثلاً $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ درحالیکه $(a,a) \notin R$.

R_1	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	0
c	0	0	0	1
d	0	0	1	0

همانطوریکه درجدول R_2 ملاحظه می‌شود داخل همه مربعات روی قطر جدول عدد ۱ قراردارد. پس R_2 انعکاسی است. R_2 متقارن نیست زیرا که $(a,b) \in R$ در حالیکه $(b,a) \notin R$. R_2 انتقالی نیز می‌باشد.

R_2	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

(ب) همانطوریکه ازجدول R پیداست R انعکاسی است ولی R متقارن نیست. زیرا که مثلاً $(1,2) \in R$ درحالیکه $(2,1) \notin R$. همچنین R انتقالی است. زیرا که داریم:

$$(x,y),(y,z) \in R \Longrightarrow x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$$

$$\Longrightarrow (x,z) \in R$$

R	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۱	۱
۳	۰	۰	۱	۱
۴	۰	۰	۰	۱

(ج) چون هر مثلث با خودش متشابه است پس R انعکاسی است • همچنین اگر مثلث x با مثلث y متشابه باشد آنگاه مثلث y با مثلث x متشابه است پس اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R$ و در نتیجه R متقارن است • بعلاوه اگر مثلث x با مثلث y و مثلث y با مثلث z متشابه باشد آنگاه مثلث x با مثلث z متشابه است • پس اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ آنگاه $(x,z) \in R$ و در نتیجه R انتقالی است•

چون برای هر مثلث x ، مساحت x مساوی مساحت x است پس برای هر x داریم $(x,x) \in S$ و در نتیجه S انعکاسی است • روشن است که اگر مساحت x مساوی مساحت y باشد آنگاه مساحت y مساوی مساحت x است • پس اگر $(x,y) \in S$ آنگاه $(y,x) \in S$ و در نتیجه S متقارن است • همچنین اگر مساحت x مساوی مساحت y و مساحت y مساوی مساحت z باشد آنگاه مساحت x مساوی z است . پس اگر $(x,y) \in S$ و $(y,z) \in S$ آنگاه $(x,z) \in S$ و در نتیجه S انتقالی است .

<u>۶-۱-۴</u>

(الف) فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$ و $R=\{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲)\}$ • در اینصورت R یک رابطه انعکاسی روی A است بطوریکه $I \neq R$ زیرا که $I=\{(۱,۱),(۲,۲)\}$ •

(ب) فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳\}$ و $R=\{(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$ • در اینصورت R یک رابطه انتقالی روی A است و بعلاوه داریم $R \circ R = \{(۱,۳)\}$ و در نتیجه $R \circ R \neq R$ •

(ج) فرض کنیم $x, y, z \in A$ • در اینصورت داریم:

$$(x,y),(y,z)\in\bigcap\mathcal{R}\Longrightarrow\forall R\left(R\in\mathcal{R}\Longrightarrow(x,y),(y,z)\in R\right)$$
$$\Longrightarrow\forall R\left(R\in\mathcal{R}\Longrightarrow(x,z)\in R\right)$$
$$\Longrightarrow(x,z)\in\bigcap\mathcal{R}$$

پس $\bigcap\mathcal{R}$ یك رابطه انتقالی روی مجموعه A است.
حال فرض کنیم که $A=\{1,2,3\}$، $R=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ و $S=\{(3,1)\}$.
در اینصورت R و S هردو روابط انتقالی روی A هستند درحالیکه $R\cup S=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,1)\}$ یك رابطه انتقالی روی A نیست . زیرا که مثلاً $(1,3)\in R\cup S$ و $(3,1)\in R\cup S$ درحالیکه $(1,1)\notin R\cup S$. بنابراین درحالت عمومی لزومی ندارد که $\bigcup\mathcal{R}$ یك رابطه انتقالی روی A باشد .

۷-۱-٤

(الف) چون $R\subseteq R\cup R^{-1}$ پس $R\cup R^{-1}$ شامل R است . نشان‌می‌دهیم که $R\cup R^{-1}$ یك رابطه متقارن روی A است . فرض کنیم $x,y\in A$. در اینصورت داریم:

$$(x,y)\in R\cup R^{-1}\Longrightarrow(x,y)\in R\vee(x,y)\in R^{-1}\Longrightarrow(y,x)\in R^{-1}\vee(y,x)\in R\Rightarrow(y,x)\in R\cup R^{-1}$$

پس $R\cup R^{-1}$ یك رابطه متقارن روی A است . حال فرض کنیم S یك رابطه متقارن روی A باشد بطوریکه $R\subseteq S$. نشان می‌دهیم که $R\cup R^{-1}\subseteq S$.

$$(x,y)\in R\cup R^{-1}\Longrightarrow(x,y)\in R\vee(x,y)\in R^{-1}\Longrightarrow(x,y)\in R\vee(y,x)\in R$$
$$\xrightarrow{R\subseteq S}(x,y)\in S\vee(y,x)\in S\xrightarrow{\text{متقارن } S}(x,y)\in S\vee(x,y)\in S$$
$$\Longrightarrow(x,y)\in S$$

پس $R\cup R^{-1}\subseteq S$. بنابراین $R\cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارن روی A شامل R است.

(ب) چون $R\cap R^{-1}\subseteq R$ پس $R\cap R^{-1}$ داخل R است • نشان می‌دهیم که $R\cap R^{-1}$ یک رابطه متقارن روی A است • فرض کنیم $x,y\in A$ • در اینصورت داریم:

$$(x,y)\in R\cap R^{-1}\Longrightarrow (x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}\Longrightarrow (y,x)\in R^{-1}\wedge(y,x)\in R\Longrightarrow (y,x)\in R\cap R^{-1}$$

پس $R\cap R^{-1}$ یک رابطه متقارن است • حال فرض کنیم که S یک رابطه متقارن روی A باشد بطوریکه $S\subseteq R$. نشان می‌دهیم $S\subseteq R\cap R^{-1}$ •

$$(x,y)\in S\xrightarrow{\text{متقارن } S \text{ و } S\subseteq R}(x,y)\in R\wedge(y,x)\in S\xrightarrow{R\subseteq S}(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R$$

$$\Longrightarrow (x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}\Longrightarrow (x,y)\in R\cap R^{-1}$$

پس $S\subseteq R\cap R^{-1}$ • بنابراین $R\cap R^{-1}$ بزرگترین رابطه متقارن روی A داخل R است •

٤-١-١١

(الف) برای هر $x\in\mathbb{R}$ چون $|x|\leqslant|x|$ پس برای $x\in\mathbb{R}$ داریم xRx و درنتیجه R انعکاسی است • چون $|1|\leqslant|2|$ پس داریم $1R2$ در حالیکه $2\not R1$ زیرا که $|2|\nleqslant|1|$. پس R متقارن نیست • برای هر $x,y,z\in\mathbb{R}$ اگر $|x|\leqslant|y|$ و $|y|\leqslant|z|$ آنگاه $|x|\leqslant|z|$ • پس برای هر $x,y,z\in\mathbb{R}$ اگر xRy و yRz آنگاه داریم xRz و درنتیجه R انتقالی است •

(ب) چون $1\neq 2=1^2+1^2$ پس $1\not R1$ و درنتیجه R انعکاسی نیست • برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ اگر $x^2+y^2=1$ آنگاه $y^2+x^2=1$ • پس برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ اگر داشته باشیم xRy آنگاه داریم yRx و درنتیجه R متقارن است • حال داریم $1^2+0^2=1$ و $0^2+1^2=1$ و درنتیجه داریم $1R0$ و $0R1$ درحالیکه داریم $1\not R1$ زیرا که $1^2+1^2=2\neq1$. پس R انتقالی نیست •

(ج) $x\in\mathbb{Z}\Longrightarrow x^2+x=x^2+x\Longrightarrow xRx$

پس R انعکاسی است.

$$x,y\in\mathbb{Z}\wedge xRy\Longrightarrow x^2+x=y^2+y\Longrightarrow y^2+y=x^2+x\Longrightarrow yRx$$

پس R متقارن است ∙

$$x,y,z\in\mathbb{Z}\wedge xRy\wedge yRz\Longrightarrow x^2+x=y^2+y\wedge y^2+y=z^2+z\Longrightarrow x^2+x=z^2+z\Longrightarrow xRz$$

پس R انتقالی است∙

(د) چون A غیر تهی است پس عنصر a وجود دارد بطوریکه $a\in A$ و در نتیجه $\{a\}\in\mathcal{P}(A)$ و ϕ ∙ چون برای $X\in\mathcal{P}(A)$ داریم $X\subseteq X$ در نتیجه XRX پس R انعکاسی است.

چون $\phi\subseteq\{a\}$ پس داریم $\phi\,R\,\{a\}$ درحالیکه $\{a\}\not R\,\phi$ زیرا که $\{a\}\nsubseteq\phi$ ∙ پس R متقارن نیست.

$$X,Y,Z\in\mathcal{P}(A)\wedge XRY\wedge YRZ\Longrightarrow X\subseteq Y\wedge Y\subseteq Z\Longrightarrow X\subseteq Z\Longrightarrow XRZ$$

پس R انتقالی است.

(هـ) اگر $x\in P$ آنگاه می توان دایره ای بمرکز مبداء مختصات رسم کرد که محیط آن شامل نقطه x باشد ∙ پس داریم xRx و در نتیجه R انعکاسی است ∙ اگر $x,y\in P$ و داشته باشیم xRy آنگاه x و y روی محیط دایره ای بمرکز مبداء مختصات قرار دارند و در نتیجه y و x نیز روی محیط همان دایره قرار خواهند داشت∙ پس داریم yRx و در نتیجه R متقارن است ∙ اگر x,y و $z\in P$ و داشته باشیم xRy و yRz آنگاه x و y روی محیط دایره ای بمرکز مبداء مختصات و y و z نیز روی دایره ای بمرکز مبداء مختصات قرار دارند ∙ چون این دو دایره هم مرکز هستند و دارای نقطه مشترک y روی محیط آنها می‌باشند پس باید برهم منطبق باشند و در نتیجه x و z روی محیط دایره ای بمرکز مبداء مختصات قرار دارند ∙ پس داریم xRz و در نتیجه R انتقالی است ∙

۱۲-۱-٤

(الف) $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$

در اینصورت R یك رابطه انعکاسی و متقارن روی A است ولی انتقالی نیست∙ زیرا که $(b,a)\in R$ و $(a,c)\in R$ درحالیکه $(b,c)\notin R$ ∙

(ب) $R=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$

در اینصورت R یك رابطه متقارن و انتقالی روی A است ولی انعکاسی نیست∙ زیرا که $(c,c)\notin R$ ∙

ج) $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$

دراینصورت R یك رابطه انعكاسی و انتقالی روی A است ولی متقارن نیست . زیرا که $(a,b)\in R$ در حالیکه $(b,a)\notin R$.

د) $R=\{(a,b),(b,c)\}$

در اینصورت R انعكاسی نیست زیرا که $(a,a)\notin R$. R متقارن نیست زیرا که $(a,b)\in R$ در حالیکه $(b,a)\notin R$. R انتقالی نیست زیرا که $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$ درحالیکه $(a,c)\notin R$.

٤-١-١٥

$$(x,y)\in R \Longrightarrow (x,y)\in R\wedge(y,y)\in I \Longrightarrow (x,y)\in I\circ R$$

$$(x,y)\in I\circ R \Longrightarrow \exists z\big((x,z)\in R\wedge(z,y)\in I\big)\Longrightarrow \exists z\big((x,z)\in R\wedge z=y\big)$$

$$\Longrightarrow (x,y)\in R$$

بنابراین $I\circ R=R$. بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $R\circ I=R$. پس $I\circ R=R\circ I=R$.

٤-١-١٦

(الف) برای هر $x\in\mathbb{Z}$ چون $x-x=0$ مضربی از ٢ است $(0=2\times 0)$ پس $x\sim x$ و در نتیجه $\sim$ انعكاسی می‌باشد . فرض كنيم $x,y\in\mathbb{Z}$ و $x\sim y$. در اینصورت $x-y$ مضرب ٢ است و در نتیجه $y-x$ مضرب ٢ می‌باشد . پس $y\sim x$ و در نتیجه $\sim$ متقارن است . حال فرض كنيم x و y و $z\in\mathbb{Z}$ و $x\sim y$ و $y\sim z$. در اینصورت $x-y$ و $y-z$ مضرب ٢ هستند و در نتیجه $x-z=(x-y)+(y-z)$ مضرب ٢ است . پس $x\sim z$ و در نتیجه $\sim$ انتقالی است . بنابراین $\sim$ یك رابطه هم ارزی می‌باشد .

(ب) اگر $u\in S$ آنگاه كره ای بمركز مبداء مختصات می‌توان رسم كرد كه u روی محیط آن قرار داشته باشد . پس $u\sim u$ و در نتیجه $\sim$ انعكاسی است . فرض كنيم

$u,v \in S$ و $u \sim v$ و u در اینصورت u و v روی محیط کره ای بمرکز مبدا مختصات قرار دارند • پس v و u نیز روی محیط همان کره قرار دارند و در نتیجه $v \sim u$ • پس $\sim$ متقارن است • حال فرض کنیم $u,v,w \in S$ و $u \sim v$ و $v \sim w$ • در اینصورت u و v روی محیط کره ای بمرکز مبداء مختصات و همچنین v و w روی محیط کره ای بمرکز مبداء مختصات قرار دارند • حال چون این دو کره هم مرکز بوده و دارای یك نقطه مشترك v روی محیط آنها میباشند پس برهم منطبق هستند • بنابراین u و w روی محیط کره ای بمرکز مبداء مختصات قرار دارند و در نتیجه $u \sim w$ • پس $\sim$ انتقالی است • بنابراین $\sim$ یك رابطه هم ارزی میباشد •

ج) اگر $u \in S$ آنگاه میتوان صفحه ای موازی صفحه xy رسم کرد بطوریکه u روی آن قرار داشته باشد • پس $u \sim u$ و در نتیجه $\sim$ انعکاسی است • فرض کنیم $u,v \in S$ و $u \sim v$ • در اینصورت u و v روی صفحه ای موازی صفحه xy قرار دارند و در نتیجه v و u نیز روی آن صفحه قرار دارند • پس $v \sim u$ و در نتیجه $\sim$ متقارن است • حال فرض کنیم $u,v,w \in S$ و $u \sim v$ و $v \sim w$ • در اینصورت u و v روی صفحه ای موازی صفحه xy و v و w روی صفحه ای موازی صفحه xy قرار دارند • چون این دو صفحه هر دو موازی صفحه xy هستند و دارای یك نقطه مشترك v میباشند پس برهم منطبق اند • بنابراین v و w روی صفحه ای موازی صفحه xy قرار دارند و در نتیجه $u \sim w$ • پس $\sim$ انتقالی است بنابراین $\sim$ یك رابطه هم ارزی میباشد •

٤-١-١٧

$$x \in A \Longrightarrow \forall R(R \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,x) \in R) \Longrightarrow (x,x) \in \bigcap \mathcal{R}$$

پس $\bigcap \mathcal{R}$ انعکاسی است •

$$x,y \in A \wedge (x,y) \in \bigcap \mathcal{R} \Longrightarrow \forall R(R \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,y) \in R)$$

$$\Longrightarrow \forall R(R \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in R)$$

$$\Longrightarrow (y,x) \in \bigcap \mathcal{R}$$

پس $\bigcap \mathcal{R}$ متقارن است ∙

$$x, y, z \in A \wedge (x, y), (y, z) \in \bigcap \mathcal{R} \Longrightarrow \forall R \, (R \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R)$$

$$\Longrightarrow \forall R \, (R \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, z) \in R)$$

$$\Longrightarrow (x, z) \in \bigcap \mathcal{R}$$

پس $\bigcap \mathcal{R}$ انتقالی است ∙ بنابراین $\bigcap \mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی A می‌باشد∙

٤-١-٢٠

برای هر $x \in \mathbb{Z}$ چون $x - x = 0$ مضرب n است $(0 = n \times 0)$ پس $x \equiv_n x$ و در نتیجه $\equiv_n$ انعکاسی است ∙ اگر $x, y \in \mathbb{Z}$ و $x \equiv_n y$ آنگاه $x - y$ مضرب n است و در نتیجه $y - x$ مضرب n می‌باشد ∙ پس $y \equiv_n x$ و در نتیجه $\equiv_n$ متقارن است ∙ حال فرض کنیم $x, y, z \in \mathbb{Z}$ و $x \equiv_n y$ و $y \equiv_n z$ ∙ در اینصورت $x - y$ و $y - z$ مضرب n بوده و در نتیجه $x - z = (x - y) + (y - z)$ مضرب n می‌باشد ∙ پس $x \equiv_n z$ و در نتیجه $\equiv_n$ انتقالی است∙ بنابراین $\equiv_n$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ می‌باشد ∙

٤-١-٢١

(الف) کلاس هم ارزی P خطی است که از نقطه (۲و۱) و (۰و ۰) می‌گذرد ∙ بنابر این کلاس هم ارزی P خطی با معادله $y = 2x$ می‌باشد ∙

(ب) کلاس هم ارزی q خطی است که از نقطه (۱ و ۰) و (۰ و ۰) می‌گذرد ∙ بنابراین کلاس هم ارزی q خطی با معادله $x = 0$ یعنی محور y ها می‌باشد ∙

(ج) کلاس هم ارزی r خطی است که از نقطه (۰ و ۱) و (۰ و ۰) می‌گذرد∙ بنابراین

کلاس هم ارزی $\overline{3}$ خطی بامعادله $y=0$ یعنی محور x ها می‌باشد ٠

(د) کلاس هم ارزی $\overline{\lambda}$ خطی است که از نقطه (٤و ٢) و (٥ و٥) می‌گذرد ٠بنابراین کلاس هم ارزی $\overline{\lambda}$ خطی بامعادله $y=2x$ می‌باشد ٠ ملاحظه می‌شود که کلاسهای هم ارزی بند های (الف) و (د) یکسانند ٠ در واقع (٤ و ٢) ~ (٢و١) .

٤-١-٢٥

فرض کنیم $\sim = I$ ٠ در اینصورت برای هر $x \in A$ داریم :

$$y \in x/_\sim \iff y \sim x \iff (y,x) \in I \iff y = x$$

پس برای هر $x \in A$ داریم $x/_\sim = \{x\}$ ٠

برعکس فرض کنیم که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x/_\sim = \{x\}$ ٠ چون $\sim$ یک رابطه هم ارزی است پس یک رابطه انعکاسی می‌باشد و در نتیجه $\sim \subseteq I$ ٠
حال فرض کنیم $(x,y) \in \sim$ ٠ در اینصورت داریم :

$$x \sim y \Longrightarrow y \in x/_\sim = \{x\} \Longrightarrow y = x \Longrightarrow (x,y) \in I$$

پس $I \subseteq \sim$ ٠ بنابراین $I = \sim$ ٠

٤-١-٢٩

(الف) $S/_\sim$ مجموعه همه کرات به مرکز مبداء مختصات است٠

(ب) $S/_\sim$ مجموعه همه صفحات موازی صفحه xy است ٠

٤-١-٣٣

$$x \in A \Longrightarrow f(x) = f(x) \Longrightarrow x \sim x$$

پس $\sim$ انعکاسی است ٠

$$x,y \in A \wedge x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x) \Longrightarrow y \sim x$$

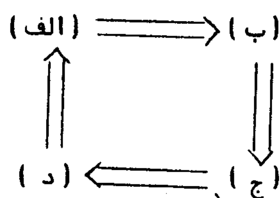
پس ~ متقارن است •

$$x,y,z\in A \wedge x\sim y \wedge y\sim z \Longrightarrow f(x)=f(y)\wedge f(y)=f(z) \Longrightarrow f(x)=f(z) \Longrightarrow x\sim z$$

پس ~ انتقالی است • بنابراین ~ یک رابطه هم ارزی می‌باشد • حال نشان می‌دهیم که برای هر $x\in A$ داریم $x/_\sim = f^{-1}\left[\{f(x)\}\right]$ •

$$y\in x/_\sim \Longleftrightarrow x\sim y \Longleftrightarrow f(x)=f(y) \Longleftrightarrow f(y)\in\{f(x)\} \Longleftrightarrow y\in f^{-1}\left[\{f(x)\}\right]$$

پس $x/_\sim = f^{-1}\left[\{f(x)\}\right]$ • حال مطابق نمودار زیر معادل بودن بندهای (الف) الی (د) را اثبات می‌کنیم •



(الف) $\Longrightarrow$ (ب)

$$y\in x/_\sim \Longrightarrow x\sim y \Longrightarrow f(x)=f(y) \xrightarrow{\text{یک بیک } f} x=y$$

پس $x/_\sim = \{x\}$ •

(ب) $\Longrightarrow$ (ج) از تمرین ۲۵-۱-٤ نتیجه می‌شود •

(ج) $\Longrightarrow$ (د) از قضیه ۳۲-۱-٤ نتیجه می‌شود •

(د) $\Longrightarrow$ (الف)

$$f(x)=f(y) \Longrightarrow x\sim y \Longrightarrow x/_\sim = y/_\sim \Longrightarrow g(x)=g(y) \Longrightarrow x=y$$

پس f یك بمك است•

٤-٢-٤

(الف) فقط $\mathbb{P}_4$ یك افراز برای A است•

(ب) $\mathbb{P}$ یك افراز $\mathbb{Q}$ نیست ، زیرا كه مثلاً $X_2 \neq X_4$ در حالیكه $X_2 \cap X_4 \neq \phi$.

(ج) $\mathbb{P}$ یك افراز $\mathbb{Z}$ نیست ، زیرا كه مثلاً $2\mathbb{Z} \neq 3\mathbb{Z}$ در حالیكه $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \neq \phi$.

٤-٢-٦

فرض كنیم $\approx$ یك رابطه هم ارزی روی A باشد بطوریكه $A/_{\approx} = \mathbb{P}$. میخواهیم نشان دهیم $\sim = \approx$.

$$(x, y) \in \approx \Longrightarrow x \approx y \Rightarrow x/_{\approx} = y/_{\approx}$$

حال $x/_{\approx} = y/_{\approx} \in A/_{\approx}$ و چون $A/_{\approx} = \mathbb{P}$ پس $x/_{\approx} = y/_{\approx} \in \mathbb{P}$.

ولی $x \in x/_{\approx}$ و $y \in y/_{\approx}$ و چون $x/_{\approx} = y/_{\approx} \in \mathbb{P}$ پس $x \sim y$ ودر نتیجه $(x, y) \in \sim$ • حال فرض كنیم $(x,y) \in \sim$ در اینصورت $x \sim y$ و در نتیجه $X \in \mathbb{P}$ وجود دارد بطوریكه $x, y \in X$ • چون $A/_{\approx} = \mathbb{P}$ پس $X \in A/_{\approx}$ و در نتیجه $z \in A$ وجود دارد بطوریكه $X = z/_{\approx}$ • بنابراین $x, y \in z/_{\approx}$ ودرنتیجه $x \approx z$ و $z \approx y$. چون $\approx$ انتقالی است پس $x \approx y$ ودرنتیجه $(x, y) \in \approx$. بنابراین $\approx = \sim$ •

٤-٢-٩

(الف)

$$\sim = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(g,g),(h,h),(a,b),(b,a),(a,g),(g,a),(a,h),(h,a),(g,h),(h,g)\}$$

ملاحظه می‌شود که $\sim$ یک رابطه هم ارزی‌روی A است •

$$A/_{\sim} = \{\{a, b, g, h\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$$

(ب) در این تمرین باید داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\sim$	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۱	۱	۰	۰
۲	۱	۱	۱	۰	۰
۳	۱	۱	۱	۰	۰
۴	۰	۰	۰	۱	۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱

در اینجا ملاحظه می‌شود :

$$A/_{\sim} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\} = \mathbb{P}$$

(ج)

$$p \in P \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow p) \Longrightarrow p \sim p$$

پس $\sim$ انعکاسی است •

$$p, q \in P \wedge p \sim q \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow (q \Longleftrightarrow p) \Longrightarrow q \sim p$$

پس $\sim$ متقارن‌است •

$$p, q, r \in P \wedge p \sim q \wedge q \sim r \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r) \Longrightarrow p \sim r$$

پس $\sim$ انتقالی است• بنابراین $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی P است • اگر $p, q \in P$ آنگاه می‌دانیم که $p \Longleftrightarrow q$ وقتی درست است‌که p و q هر دو درست‌یا هردو غلط باشند • بنابراین برای هر $p, q \in P$ ، $p \sim q$ اگر و فقط اگر p و q هردو درست‌یا هردو غلط‌باشند • پس اگر p یک گزاره درست‌باشد آنگاه کلاس هم ارزی آن مجموعه همه گزاره های‌درست‌و اگر p یک گزاره غلط‌باشد آنگاه کلاس هم ارزی آن مجموعه همه گزاره های غلط است •

بنابراین مجموعه خارج قسمت $P/_\sim$ فقط دارای دو عنصر است که یکی مجموعه همه گزاره های درست و دیگری مجموعه همه گزاره های غلط است٠

٤-٣-٨

(الف)

⩽	١	٢	٣	۴	۵	٦	٧
١	١	۰	۰	۰	۰	۰	۰
٢	۰	١	۰	۰	۰	۰	۰
٣	۰	١	١	١	١	١	١
۴	۰	١	۰	١	۰	۰	۰
۵	۰	١	۰	۰	١	۰	۰
٦	۰	۰	۰	۰	۰	١	۰
٧	۰	١	۰	١	١	۰	١

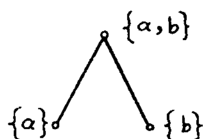
(ب) ملاحظه می‌شود که رابطه $\leqslant$ انعکاسی ، نامتقارن و انتقالی است ٠ پس یک رابطه ترتیبی جزئی روی A می‌باشد ٠

(ج) ١ با هیچ عنصر دیگر A مقایسه پذیر نیست ٠ همچنین ٦ فقط با ٣ مقایسه پذیر است و با سایر عناصر A مقایسه پذیر نیست ٠ ٣ با همه عناصر A بغیر از ١ مقایسه پذیر است ٠ ٧ با همه عناصر A بغیر از ١ و ٦ مقایسه پذیر است٠ ۵ با ٣ ، ٧ و ٢ مقایسه پذیر است ٠ ٤ نیز با ٣ ، ٧ و ٢ مقایسه پذیر است ٠ و بالاخره ٢ با همه عناصر A بغیر از ١ و ٦ مقایسه پذیر است٠

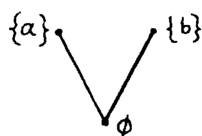
٤-٣-١٦

فرض کنیم $\mathcal{A}=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ و رابطه ترتیبی جزئی $\subseteq$ را روی $\mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم ٠ در اینصورت نمودار این رابطه بصورت زیر است٠ ملاحظه می‌شود که $\{a\}$ و $\{b\}$ دو عنصر می‌نیمال $\mathcal{A}$ هستند زیرا که عنصری کوچکتر از هر یک از آنها وجود ندارد ٠ ولی هیچ یک از این دو عنصر یک کوچکترین عنصر برای

$\mathcal{A}$ نمی‌باشد زیرا که $\{b\} \nsubseteq \{a\}$ و $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ ۰



حال فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\phi,\{a\},\{b\}\}$ و رابطه ترتیبی جزیی $\subseteq$ را روی $\mathcal{B}$ در نظر می‌گیریم ۰ در اینصورت نمودار این رابطه بصورت زیر است ۰ ملاحظه می‌شود که $\{a\}$ و $\{b\}$



دو عنصر ماکسیمال $\mathcal{B}$ هستند زیرا که عنصری بزرگتر از هر یک از آنها وجود ندارد ۰ ولی هیچ یک ازاین دو عنصر یک بزرگترین عنصر برای $\mathcal{B}$ نمی‌باشد ۰ زیرا که $\{b\} \nsubseteq \{a\}$ و $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ ۰

۱۸-۳-٤

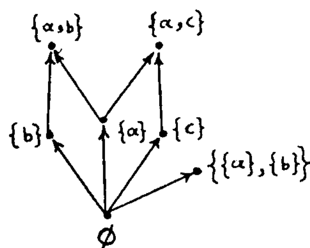
(الف) نسبت به رابطه $\leqslant_1$ ، ۸ کوچکترین عنصر و ۱ بزرگترین عنصر A هستند ۰ نسبت به رابطه $\leqslant_2$ ، A کوچکترین و بزرگترین عنصر ندارد ۰نسبت به رابطه $\leqslant_3$ ، ۱ کوچکترین عنصر است و بزرگترین عنصر ندارد ۰

(ب) نسبت به رابطه $\leqslant_1$ ، ۸ تنها عنصر می‌نیمال و ۱ تنهاعنصر ماکسیمال A است ۰ نسبت به رابطه $\leqslant_2$ ، ۱ ،٦ و ۳ عناصر می‌نیمال و ۱ ،۲ ،۱۰ ،۹ و ۵ عناصر ماکسیمال A هستند ۰ نسبت به رابطه $\leqslant_3$ ، ۱ تنها عنصر می‌نیمال و ٤ ، ٥و۱۰ عناصر ماکسیمال A هستند ۰

(ج) رابطه $\leqslant_1$ یک رابطه ترتیبی خطی است زیرا که هردو عنصر A تحت این رابطه مقایسه پذیرند ۰

۴-۳-۱۹

(الف)



(ب) $\varnothing$ کوچکترین عنصر A است و A بزرگترین عنصر ندارد •

(ج) $\varnothing$ تنها عنصر مینیمال A است و $\{a,b\}$ ، $\{a,c\}$ و $\{\{a\},\{b\}\}$ عناصر ماکسیمال A می‌باشند •

۴-۳-۲۰

(الف) چون هردو عنصر Q' تحت رابطه $\leqslant$ مقایسه پذیرند پس $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی خطی روی Q' است •

(ب) Q' کوچکترین عنصر ندارد و 0 بزرگترین عنصر Q' است•

(ج) Q' عنصر مینیمال ندارد و 0 تنها عنصر ماکسیمال Q' است •

۴-۳-۲۱

(الف)

$$(x,y)\in N\times N \Longrightarrow x\in N\wedge y\in N \Longrightarrow x\leqslant x\wedge y\leqslant y \Longrightarrow (x,y)\leqslant(x,y)$$

پس $\leqslant$ انعکاسی است •

$$(x,y),(x',y')\in N\times N\wedge(x,y)\leqslant(x',y')\wedge(x',y')\leqslant(x,y)\Longrightarrow x\leqslant x'\wedge y\leqslant y'\wedge x'\leqslant x\wedge y'\leqslant y$$

$$\Longrightarrow x=x'\wedge y=y'$$

$$\Longrightarrow (x,y)=(x',y')$$

پس $\leqslant$ نامتقارن است ·

$$(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\wedge(x,y)\leqslant(x',y')\wedge(x',y')\leqslant(x'',y'')\Rightarrow x\leqslant x'\wedge y\leqslant y'\wedge x'\leqslant x''\wedge y'\leqslant y''$$

$$\Longrightarrow x\leqslant x''\wedge y\leqslant y''$$

$$\Longrightarrow (x,y)\leqslant(x'',y'')$$

پس $\leqslant$ انتقالی است · بنابراین $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی جزیی روی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ میباشد·

(ب) خیر ، $\leqslant$ یك رابطه ترتیبی خطی روی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نیست· زیرا که

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ni$ (۱ ، ۲) و (۲ ، ۱) و مقایسه پذیر نیستند ·

(ج)

(۱و۵) (۲و۴) (۳و۳) (۴و۲) (۵و۱)

(۱و۴) (۲و۳) (۳و۲) (۴و۱)

(۱و۳) (۲و۲) (۳و۱)

(۱و۲) (۲و۱)

(۱و۱)

(د) (۱ ، ۱) کوچکترین عنصر و همچنین تنها عنصر می‌نیمال $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ بزرگترین عنصر و همچنین عنصر ماکسیمال ندارد ·

(هـ) (۱ ، ۱) کوچکترین عنصر و همچنین تنها عنصر می‌نیمال این زیر مجموعه است و این زیر مجموعه بزرگترین عنصر ندارد · عناصر (۱،۵) ، (۲،٤) ،(۳،۳) ، (٤،۲) ، (۵ ، ۱) همگی عناصر ماکسیمال این زیر مجموعه هستند ·

۴-۳-۲۴

(الف)

α یک کران پایین A است $\Longleftrightarrow \forall x (x \in A \Longrightarrow \alpha \leqslant x) \Longleftrightarrow \alpha$ کوچکترین عنصر A است

(ب)

c یک کران بالای A است $\Longleftrightarrow \forall x (x \in A \Longrightarrow x \leqslant c) \Longleftrightarrow c$ بزرگترین عنصر A است

۴-۳-۲۷

(الف) فرض کنیم α کوچکترین عنصر A است . در اینصورت $\alpha \leqslant x$ برای هر $x \in A$. پس α یک کران پائین برای A است . بعلاوه α تنها کران پایین A می‌باشد . زیرا که اگر α' یک کران پایین A باشد آنگاه $\alpha' \leqslant x$ برای هر $x \in A$ و در نتیجه $\alpha' \leqslant \alpha$. ولی چون α کوچکترین عنصر A است پس $\alpha' = \alpha$. بنابراین α تنهاکران پایین A است و در نتیجه $\alpha = inf A$. برعکس اگر $\alpha = inf A$ آنگاه $\alpha \leqslant x$ برای هر $x \in A$ و در نتیجه α کوچکترین عنصر A است .

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که b بزرگترین عنصر A است اگر و فقط اگر $b = sup A$.

(ب) B مجموعه کرانهای پایین $= \{(۱،۱) \text{ و } (۱،۲) \text{ و } (۲،۱) \text{ و } (۲،۲)\}$

$inf B = (۲،۲)$ و $sup B = (۳،۲)$

چون $(۱،۱)$ کوچکترین عنصر $N \times N$ پس $inf(N \times N) = (۱،۱)$.

(ج) فرض کنیم $\alpha \in A$,α و α و α' دو بزرگترین کران پایین برای B باشند . نشان می‌دهیم که $\alpha = \alpha'$ ، چون α بزرگترین کران پایین B است و α' یک کران پایین برای B می‌باشد پس $\alpha' \leqslant \alpha$. بطریق مشابه چون α' کوچکترین کران

پایین B است و α یک کران پایین برای B می‌باشد پس $\alpha \leqslant \alpha'$ • بنابراین $\alpha = \alpha'$ و در نتیجه $\inf B$ در صورت وجود یکتاست • بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $\sup B$ در صورت وجود یکتا می‌باشد •

(د) رابطه $\leqslant_{2}$ روی A در تمرین ۱۸-۳-٤ را در نظر می‌گیریم • فرض کنیم $B = \{٤ ، ٧\}$ و $C = \{٤ ، ٨\}$ • در اینصورت $\sup B = ٧$ و $\sup C = ٨$ ، در حالیکه $\sup B \cup C$ وجود ندارد ، زیرا که $B \cup C = \{٤ ، ٧ ، ٨\}$ دارای کران بالا در A نمی‌باشد • پس در حالت عمومی اگر $\sup B$ و $\sup C$ وجود داشته باشند ، آنگاه لزومی ندارد که $\sup(B \cup C)$ وجود داشته باشد •

حال فرض کنیم $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی خطی روی A باشد ، $B ، C \subseteq A$ و $\sup(B \cup C)$ وجود داشته باشد • نشان می‌دهیم که $\sup B$ یا $\sup C$ وجود دارد • در واقع جمله زیر را اثبات می‌کنیم :

$$\alpha = \sup(B \cup C) \Longrightarrow \alpha = \sup B \vee \alpha = \sup C$$

چون α یک کران بالای $B \cup C$ است پس α یک کران بالای B و α یک کران بالای C می‌باشد •

فرض کنیم که α' یک کران بالا برای B و α'' یک کران بالا برای C باشد • چون $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی خطی روی A است پس $\alpha' \leqslant \alpha''$ یا $\alpha'' \leqslant \alpha'$ • اگر $\alpha' \leqslant \alpha''$ ، آنگاه α'' یک کران بالا برای $B \cup C$ است زیرا که داریم :

$$x \in B \cup C \Longrightarrow x \in B \vee x \in C \Longrightarrow x \leqslant \alpha' \vee x \leqslant \alpha'' \xRightarrow{\alpha' \leqslant \alpha''} x \leqslant \alpha'' \vee x \leqslant \alpha'' \Longrightarrow x \leqslant \alpha''$$

بنابراین α'' یک کران بالای $B \cup C$ است و چون $\alpha = \sup(B \cup C)$ پس $\alpha \leqslant \alpha''$ و در نتیجه $\alpha = \sup C$ • بطریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر $\alpha'' \leqslant \alpha'$ آنگاه $\alpha \leqslant \alpha'$ و در نتیجه $\alpha = \sup B$ • بنابراین $\alpha = \sup B$ یا $\alpha = \sup C$ •

۴-۳-۳۲

(الف) فرض کنیم $\alpha \in A$ ، در اینصورت چون $x \in \phi$ غلط است پس جمله $x \in \phi \Longrightarrow x \leqslant \alpha$ درست است و در نتیجه α یک کران بالای ϕ است. بنابراین هر عنصر A یک کران بالا برای ϕ است. پس مجموعه همه کرانهای بالای ϕ مساوی A است. بطریق مشابه می‌توان نشان داد که مجموعه همه کرانهای پایین ϕ مساوی A است. حال اگر $\alpha = \inf A$ آنگاه $\alpha \leqslant x$ برای هر $x \in A$ وچون A مجموعه همه کرانهای بالای ϕ است پس $\alpha = \sup \phi$. بنابراین $\inf A = \sup \phi$. بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $\sup A = \inf \phi$.

(ب)

$$x \in A \Longrightarrow x \leqslant x \Longrightarrow x \overset{-1}{\leqslant} x$$

پس $\overset{-1}{\leqslant}$ انعکاسی است.

$$x, y \in A \wedge x \overset{-1}{\leqslant} y \wedge y \overset{-1}{\leqslant} x \Longrightarrow y \leqslant x \wedge x \leqslant y \Longrightarrow x = y$$

پس $\overset{-1}{\leqslant}$ نامتقارن است.

$$x, y, z \in A \wedge x \overset{-1}{\leqslant} y \wedge y \overset{-1}{\leqslant} z \Longrightarrow y \leqslant x \wedge z \leqslant y \Longrightarrow z \leqslant x \Longrightarrow x \overset{-1}{\leqslant} z$$

پس $\overset{-1}{\leqslant}$ انتقالی است. بنابراین $\overset{-1}{\leqslant}$ یک رابطه ترتیبی جزئی روی A می‌باشد.

(ج) فرض کنیم $\alpha = \sup B$ نسبت به رابطه $\leqslant$. در اینصورت داریم:

$$x \in B \Longrightarrow x \leqslant \alpha \Longrightarrow \alpha \overset{-1}{\leqslant} x$$

پس α یک کران پایین برای B نسبت به رابطه $\overset{-1}{\leqslant}$ می‌باشد. حال فرض کنیم α' یک کران پایین B نسبت به رابطه $\overset{-1}{\leqslant}$ باشد. در اینصورت داریم:

$$x \in B \Longrightarrow \alpha' \overset{-1}{\leqslant} x \Longrightarrow x \leqslant \alpha'$$

و در نتیجه α' یک کران بالا برای B نسبت به رابطه $\leqslant$ است. چون $\alpha = \sup B$ نسبت به رابطه $\leqslant$ پس $\alpha \leqslant \alpha'$ و در نتیجه $\alpha' \overset{-1}{\leqslant} \alpha$.

بنابراین α بزرگترین کران پایین B نسبت به رابطه $\overset{-1}{\leqslant}$ است و در نتیجه $\alpha = \inf B$ نسبت به رابطه $\overset{-1}{\leqslant}$.

۴-۳-۳۵

(الف) چون R یک رابطه ترتیبی خطی اکید است پس R یک رابطه انتقالی روی A می‌باشد • نشان می‌دهیم که $R \cap I = \phi$ • فرض کنیم که $(x, y) \in R \cap I$• در اینصورت $(x, y) \in R$ و $(x, y) \in I$ • پس داریم xRy و $x = y$ که خلاف تعریف یک رابطه ترتیبی خطی است • زیرا که چون R یک رابطـــه ترتیبی خطی است پس بنا به تعریف برای هر $x, y \in A$ باید دقیقاً یکـی از حالات زیر قرار باشد •

$$xRy \vee yRx \vee x = y$$

پس $R \cap I = \phi$ و در نتیجه R یک رابطه ترتیبی جزیی اکید روی A می‌باشد•

(ب)

$$x, y, z \in A \wedge (x, y), (y, z) \in R - I \Longrightarrow (x, y), (y, z) \in R \wedge (x, y) \notin I \wedge (y, z) \notin I$$

$$\Longrightarrow (x, z) \in R \wedge x \neq y \wedge y \neq z$$

حال چون $(x, z) \in R$ پس xRz و در نتیجه $x \neq z$ (زیرا اگر $z = x$ آنگاه $(x, y), (y, x) \in R$ که نتیجه می‌دهد $x = y$) • بنابراین $(x, z) \in R$ و $(x, z) \notin I$ و در نتیجه $(x, z) \in R - I$• پس $R - I$ انتقالی است •

فرض کنیم $x, y \in A$• در اینصورت $x = y$ یا $x \neq y$ • یعنی $(x, y) \in I$ یا $(x, y) \notin I$ • اگر $(x, y) \in I$ آنگاه یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد :

$$(x, y) \in R - I \vee (y, x) \in R - I \vee (x, y) \in I$$

اگر $(x, y) \notin I$ آنگاه چون R یک رابطه ترتیبی خطی است پس $(x, y) \in R$ یا $(y, x) \in R$ و در نتیجه $(x, y) \in R - I$ یا $(y, x) \in R - I$•

پس در این جا نیز یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد :

$$(x, y) \in R - I \vee (y, x) \in R - I \vee (x, y) \in I$$

حال دقیقاً یکی از حالات فوق اتفاق می‌افتد • زیرا که روشن است دو حالـــــت $(x, y) \in R - I \wedge (x, y) \in I$ و $(y, x) \in R - I \wedge (x, y) \in I$ نمی‌توانند اتفاق بیافتند • همچنین حالت $(x, y) \in R - I \wedge (y, x) \in R - I$ نیز نمی‌تواند اتفاق بیافتد زیرا که در غیر اینصورت چون $R - I$ انتقالی است آنگـاه

$(x,x)\in R-I$ که یک تناقض است • پس دقیقاً یکی از حالات فوق اتفاق می‌افتد و در نتیجه $R-I$ یک رابطه ترتیبی خطی اکید روی A است •

ج) $x\in A \Longrightarrow (x,x)\in I \Longrightarrow (x,x)\in R\cup I$

پس $R\cup I$ انعکاسی است•

$$x,y\in A\wedge(x,y)\in R\cup I\wedge(y,x)\in R\cup I \Longrightarrow \big((x,y)\in R\vee(x,y)\in I\big)\wedge\big((y,x)\in R\vee(y,x)\in I\big)$$

اگر یکی از حالات $(x,y)\in I$ یا $(y,x)\in I$ برقرار باشد آنگاه نتیجه می‌شود که $x=y$• فرض کنیم که $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$• در اینصورت چون R انتقالی است پس $(y,y)\in R$ که یک تناقض می‌باشد زیرا که R یک رابطه ترتیبی خطی اکید است • بنابراین یکی از حالات $(x,y)\in I$ یا $(y,x)\in I$ باید اتفاق بیافتد و در نتیجه $x=y$• پس $R\cup I$ نامتقارن است •

$$x,y,z\in A\wedge(x,y),(y,z)\in R\cup I \Longrightarrow \big((x,y)\in R\vee(x,y)\in I\big)\wedge\big((y,z)\in R\vee(y,z)\in I\big)$$

اگر یکی از حالات $(x,y)\in I$ یا $(y,z)\in I$ برقرار باشد آنگاه $x=y$ یا $y=z$ و در نتیجه $(x,z)\in R\cup I$• فرض کنیم $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$• چون R انتقالی است پس $(x,z)\in R$ و در نتیجه $(x,z)\in R\cup I$•بنابراین $R\cup I$ یک رابطه ترتیبی جزیی است • حال نشان می‌دهیم که هردو عنصر A تحت رابطه $R\cup I$ مقایسه پذیرند •

$$x,y\in A \Longrightarrow (x,y)\in R\vee(y,x)\in R\vee(x,y)\in I$$
$$\Longrightarrow (x,y)\in R\cup I\vee(y,x)\in R\cup I$$

بنابراین $R\cup I$ یک رابطه ترتیبی خطی است•

۴-۳-۳۸

الف) $x\in \mathbb{N}\Longrightarrow x=1x\Longrightarrow x\mid x$

پس $\mid$ انعکاسی است•

$$x, y \in \mathbb{N} \wedge x | y \wedge y | x \Longrightarrow \exists m, n (m, n \in \mathbb{N} \wedge y = mx \wedge x = ny)$$

$$\Longrightarrow y = m(ny) = mny$$

$$\Longrightarrow 1 = mn$$

$$\Longrightarrow m = n = 1$$

$$\Longrightarrow x = y$$

پس | نامتقارن است •

$$x, y, z \in \mathbb{N} \wedge x | y \wedge y | z \Longrightarrow \exists m, n (m, n \in \mathbb{N} \wedge y = mx \wedge z = ny)$$

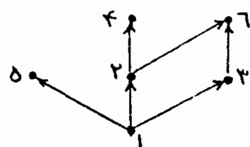
$$\Longrightarrow z = n(mx) = (nm) x$$

$$\Longrightarrow x | z$$

پس | انتقالی است • بنابراین | یک رابطه ترتیبی جزیی روی $\mathbb{N}$ می‌باشد •

ب) خیر، $\mathbb{N}$ با رابطه | یک مجموعه مرتب خطی نیست • زیرا که مثلاً ۲و۳ در $\mathbb{N}$ تحت رابطه | مقایسه پذیر نیستند •

ج)



د)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۳	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰

(هـ) ۱ کوچکترین عنصر A و همچنین ۱ تنها عنصر می‌نیمال A است. A بزرگترین عنصر ندارد و ۵،۴ و ۶ عناصر ماکسیمال A هستند.

(و) $\inf B = 1$ و $\sup B = 6$.

۴-۳-۳۹

فرض کنیم $A = \{a_1, \dots\dots, a_n\}$ یک مجموعه مرتب جزیی با رابطه $\leqslant$ باشد. توسط استقرا روی n نشان می‌دهیم که A دارای یک عنصر می‌نیمال است. اگر $n = 1$ یعنی $A = \{a_1\}$ آنگاه روشن است که a_1 یک عنصر می‌نیمال A است. فرض کنیم که هرمجموعه مرتب جزیی با $n-1$ عنصر دارای عنصر می‌نیمال است. فرض کنیم که $B = A - \{a_n\} = \{a_1, \dots\dots, a_{n-1}\}$. در اینصورت بنا به فرض استقرا B دارای یک عنصر می‌نیمال مانند b است. اگر b با a_n مقایسه پذیر نباشد آنگاه b یک عنصر می‌نیمال A است. اگر b با a_n مقایسه پذیر باشد آنگاه $a_n \leqslant b$ یا $b \leqslant a_n$. اگر $a_n \leqslant b$ آنگاه a_n یک عنصر می‌نیمال A است. اگر $b \leqslant a_n$ آنگاه b یک عنصر می‌نیمال A است. پس در هر حالت A دارای یک عنصر می‌نیمال است.

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که A دارای یک عنصر ماکسیمال است.

حل مسائل فصل ۵

۵-۱-۱۸

فرض کنیم $|A|=m$ و $|B|=n$ ، در اینصورت $A\sim\overline{m}$ و $B\sim\overline{n}$.
اگر $A\sim B$ ، آنگاه $\overline{m}\sim\overline{n}$ و در نتیجه $m=n$ ، اگر $m=n$ آنگاه
$\overline{m}\sim\overline{n}$ و در نتیجه $A\sim B$ ، بنابراین $A\sim B$ اگر و فقط اگر $|A|=|B|$

۵-۱-۲۳

فرض کنیم A یک مجموعه متناهی باشد و $B\subseteq A$ ، در اینصورت $B=A$ یا
$B\subset A$ ، اگر $B=A$ آنگاه چون A متناهی است پس B متناهی است ، اگر
$B\subset A$ آنگاه بنابه قضیه ۵-۱-۱۹ ، B متناهی است ، پس در هر حالت
B متناهی می‌باشد ،

۵-۱-۲۵

(الف) ابتدا جمله زیر را اثبات می‌کنیم :

$$A\cap B=\Phi \Longrightarrow |A\cup B|=|A|+|B|$$

فرض کنیم که $|A|=m$ و $|B|=n$ ، یعنی $A\sim\overline{m}$ و $B\sim\overline{n}$.
بسهولت می توان دید $\overline{n}\sim\{m+1, m+2, \dots, m+n\}$ ، $\overline{m}\cap\{m+1, m+2, \dots, m+n\}=\Phi$
و $\overline{m}\cup\{m+1, m+2, \dots, m+n\}=\overline{m+n}$ حال چون $A\sim\overline{m}$ ، $B\sim\{m+1, \dots, m+n\}$ ،

$A\cap B=\Phi$ ، $\overline{m}\cap\{m+1, m+2, \dots, m+n\}=\Phi$ پس بنا به قضیه ۵-۱-۵
(الف) داریم: $A\cup B\sim\overline{m}\cup\{m+1, m+2, \dots, m+n\}=\overline{m+n}$

بنابراین $|A \quad B| = m+n$ و در نتیجه $|A\cup B| = |A| + |B|$

حال مساله را درحالت کلی ثابت می‌کنیم • بسهولت می‌توان دید که

$(A-(A\cap B))\cup B = A\cup B$ و $(A-(A\cap B))\cap B = \phi$ همچنین

بسهولت می‌توان دید که چون $A\cap B \subset A$ پس

$|A-(A\cap B)| = |A| - |A\cap B|$. بنابراین با استفاده از قسمت اول اثبات داریم :

$$|A\cup B| = |(A-(A\cap B))\cup B| = |A-(A\cap B)| + |B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

(ب) فرض کنیم $|A| = m$ و $|B| = n$، یعنی $A\sim \overline{m}$ و $B\sim \overline{n}$.

ابتدا بوسیله استقراروی m نشان می‌دهیم $|\overline{m}\times\overline{n}| = mn$. اگر $m=0$ یعنی $\overline{m}=\phi$، آنگاه $\overline{m}\times\overline{n}=\phi$ و در نتیجه $|\overline{m}\times\overline{n}| = 0 = 0\times n$

حال فرض کنیم که $|(\overline{m-1})\times\overline{n}| = (m-1)n$. چون $\overline{m}\times\overline{n} = ((\overline{m-1})\times\overline{n})\cup(\{m\}\times\overline{n})$ و $((\overline{m-1})\times\overline{n})\cap(\{m\}\times\overline{n}) = \phi$ پس با استفاده از بند (الف) این تمرین داریم :

$$|\overline{m}\times\overline{n}| = |(\overline{m-1})\times\overline{n}| + |\{m\}\times\overline{n}| = (m-1)n + n = mn$$

البته در اثبات تساویهای فوق از $\{m\}\times\overline{n}\sim\overline{n}$ نیز استفاده شده است •

حال چون $A\sim\overline{m}$ و $B\sim\overline{n}$ پس بنا به قضیه ۵-۱-۵ (ب) •

$A\times B\sim\overline{m}\times\overline{n}$ و در نتیجه با استفاده از تمرین ۱۸-۱-۵ داریم:

$$|A\times B| = |\overline{m}\times\overline{n}| = mn = |A||B|$$

(ج) توسط استقرا روی $|A|$ مساله را اثبات می‌کنیم • اگر $|A|=0$ یعنی $A=\phi$

آنگاه $A_B = \{\phi\}$ و در نتیجه داریم : $|A_B| = 1 = |B|^0 = |B|^{|A|}$

حال فرض کنیم که $A \neq \phi$ و تساوی برای مجموعه های با عدد $|A|-1$ برقرار باشد • چون $A \neq \phi$ پس $a \in A$ وجود دارد • بنابه اثبات بند (د)قضیه ۵-۱-۲۴ داریم :

$$A_B \sim (A-\{a\})_B \times \{a\}_B$$

پس با استفاده از فرض استقرا ، $B \sim \{a\}_B$ وبند (ب) این تمرین داریم:

$$|A_B| = |(A-\{a\}_B||\{a\}_B| = |B|^{|A-\{a\}|}|B| = |B|^{|A|-1}|B| = |B|^{|A|}$$

(د) با استفاده از قضیه ۵-۱-۸ و بند (ج) این تمرین داریم :

$$|P(A)| = |A\{0,1\}| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$$

۵-۱-۳۱

اگر A و B دو مجموعه بی‌شمار باشند آنگاه $A \sim N$ و $B \sim N$ و در نتیجه بنا به قضیه ۵-۱-۳ ، $A \sim B$ • بنابراین هردو مجموعه بی‌شمار هم ارز می‌باشند •

۵-۱-۳۶

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک مجموعه متناهی از مجموعه های متناهی باشد • توسط استقرا روی $|\mathcal{A}|$ نشان می‌دهیم که $\cup\mathcal{A}$ متناهی است• اگر $|\mathcal{A}| = 0$ یعنی $\mathcal{A} = \phi$ آنگاه $\cup\mathcal{A} = \phi$ و در نتیجه $\cup\mathcal{A}$ متناهی است • فرض کنیم که $\mathcal{A} \neq \phi$ و مساله در مورد همه مجموعه های با عدد $|\mathcal{A}|-1$ برقرار باشد • چون

$\mathcal{A} \neq \phi$ پس $x \in \mathcal{A}$ وجود دارد ۰ حال $\cup\mathcal{A} = (\cup(\mathcal{A}-\{x\}))\cup x$ و بنا به فرض استقرا چون $|\mathcal{A}-\{x\}| = |\mathcal{A}|-1$ پس $\cup(\mathcal{A}-\{x\})$ متناهی است و چون x متناهی است پس بنابه قضیه ۲۴-۱-۵ (ب) ، $\cup\mathcal{A} = (\cup(\mathcal{A}-\{x\}))\cup x$ متناهی می‌باشد ۰

۵-۱-۳۴

(الف) فرض کنیم $|A| = n$ ، یعنی $A \sim \bar{n}$ ۰اگر f یک بیک باشد آنگاه $A \sim ran f$ و چون $ran f \subseteq A$ از ۵-۱-۲۰ نتیجه می‌شود که $ran f = A$ ، یعنی f پوشا ست ۰ حال فرض کنیم f پوشا باشد ۰ چون $A \sim \bar{n}$ پس یک تابع دوسویی $g : \bar{n} \to A$ وجود دارد ۰ فرض کنیم $g(i) = a_i$ برای هر $i \in \bar{n}$ ۰ در اینصورت چون g دو سویی است پس $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ۰ پس $ran f = \{f(a_1), \dots f(a_n)\}$ حال اگر $f(a_i) = f(a_j)$ برای $i \neq j$ آنگاه نتیجه می‌شود که $|ran f| \leqslant n-1$ که برخلاف فرض است زیرا که $ran f = A$ و در نتیجه $|ran f| = n$ ۰بنابراین اگر $i \neq j$ آنگاه $f(a_i) \neq f(a_j)$ و در نتیجه f یک بیک است ۰

(ب) البته در فرض این مساله باید تاکید شود که $A \neq \phi$ ۰ توسط استقرا روی $|A|$ مساله را ثابت می‌کنیم ۰ اگر $|A| = 1$ ، یعنی A یک مجموعه تک عضوی بصورت $A = \{a\}$ باشد آنگاه چون $\{a\} \times B \sim B$ پس $A \times B$ یک مجموعه بی‌شمار می‌باشد ۰ حال فرض کنیم که $|A| > 1$ و اگر A' یک مجموعه با عدد $|A|-1$ باشد آنگاه $A' \times B$ بی‌شمار است ۰ فرض کنیم $a \in A$ ۰ در اینصورت داریم :

$$A \times B = ((A-\{a\}) \times B) \cup (\{a\} \times B)$$

چون $|A-\{a\}|=|A|-1$ پس بنا به فرض استقرا $(A-\{a\})\times B$ بی شمار است و چون $\{a\}\times B=B$ پس $\{a\}\times B$ بی‌شمار است و در نتیجه بنا به ۳۴-۱-۵، $A\times B$ بی‌شمار است.

(ج) چون A و B هردو بی‌شمارند پس $A\sim\mathbb{N}$ و $B\sim\mathbb{N}$. پس بنا به ۵-۱-۵(ب) $A\times B\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و در نتیجه بنا به ۲-۱-۵ (و)، $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$، $A\times B\sim\mathbb{N}$. بنا بر این $A\times B$ بی‌شمار است.

(د) بوسیله استقرا روی n مساله را ثابت می‌کنیم. اگر $n=1$ آنگاه نتیجه روشن است. پس فرض کنیم $n>1$ و نتیجه برای $n-1$ برقرار باشد. حال $A_1\times\cdots\times A_n=(A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n$. بنابر فرض استقرا $A_1\times\cdots\times A_{n-1}$ بی شمار است. چون A_n بی‌شمار است پس بنا به بند (ج)، $A_1\times\cdots\times A_n$ بی شمار است.

(هـ) فرض کنیم $-\mathbb{N}=\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}$. در اینصورت $\mathbb{Z}=(-\mathbb{N})\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$. حال روشن است که تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow-\mathbb{N}$ بطوریکه $f(n)=-n$ یک تابع دو سویی می‌باشد و در نتیجه $-\mathbb{N}$ بی‌شمار است. همچنین $\mathbb{N}$ بی‌شمار است و $\{0\}$ یك مجموعه متناهی می‌باشد. پس از ۳۲-۱-۵ و ۳۴-۱-۵ نتیجه می‌شود که $\mathbb{Z}$ بی شمار است.

(و) روشن است که برای هر $n\in\mathbb{N}$ تابع $f_n:\mathbb{Z}\to A_n$ بطوریکه $f_n(m)=m/n$ یك تابع دوسویی است. پس برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $A_n\sim\mathbb{Z}$. چون $\mathbb{Z}$ بی شمار است پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، A_n بی شمار است. حال بنا به ۳۹-۱-۵، $\mathbb{Q}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ بی شمار است.

(ز) فرض کنیم که $\mathcal{C}$ مجموعه کلیه دوایر باشد بطوریکه مختصات مرکز و اندازه طول شعاع آنها اعداد گویا باشند ، تعریف می‌کنیم:

$$f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$
$$f(C) = (x_1 , x_2 , x_3)$$

که درآن (x_1 , x_2) مختصات مرکز C و x_3 اندازه طول شعاع C می‌باشد . دراینصورت f دو سویی است . زیرا کـــه داریـــم :

$$f(C) = f(C') \Longrightarrow (x_1 , x_2 , x_3) = (x'_1 , x'_2 , x'_3)$$
$$\Longrightarrow (x_1 , x_2) = (x'_1 , x'_2) \wedge x_3 = x'_3$$
$$\Longrightarrow C = C'$$

پس یک بیک است . همچنین برای هر $(x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ اگر C دایره ای با مرکز (x_1 , x_2) و شعاع به طول x_3 باشدآنـگاه $f(C) = (x_1 , x_2 , x_3)$. پس f پوشاست .

بنابراین f دو سویی استو در نتیجه $\mathcal{C} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.بنابه بند (د) این تمرین ، $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ بی‌شمار استو در نتیجه $\mathcal{C}$ بی‌شمار است .

(ح) می‌دانیم که چون $B \subseteq A$ پس $A = B \cup (A - B)$. حال اگر $A - B$ شمارش پذیر باشد ، آنگاه بنابه ۴۰-۱-۵ ، A شمارش پذیر است که برخلاف فرض میباشد . بنابراین $A - B$ شمارش ناپذیر است .

(ط) بنا به بند (د) این تمرین برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ بی شمار است . پس بنا ۳۹-۱-۵ مجموعه $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ بی‌شمار است .

(ی) فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعه همه زیر مجموعه های متناهی از $\mathbb{N}$ باشد . رابطه $\sim$ را

روی $\mathcal{A}$ بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$A \sim A' \iff A \text{ هم ارز } A' \text{ باشد}$$

در اینصورت بنا به ۳-۱-۵ رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{A}$ است. تعریف می کنیم :

$$f : \mathcal{A}/_{\sim} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f\left(A/_{\sim}\right) = |A|$$

در اینصورت f یک تابع دوسویی است . زیرا که داریم:

$$f\left(A/_{\sim}\right) = f\left(A'/_{\sim}\right) \Longrightarrow |A| = |A'| \Longrightarrow A \sim A' \Longrightarrow A/_{\sim} = A'/_{\sim}$$

پس f یک بیک است . همچنین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(\bar{n}/_{\sim}) = n$

و در نتیجه f پوشاست . بنابراین f یک تابع دوسویی است و در نتیجه $\mathcal{A}/_{\sim} \sim \mathbb{N}$.

پس $\mathcal{A}/_{\sim}$ یک مجموعه بی‌شمار از مجموعه های شمارش پذیر می‌باشد و در نتیجه بنابه ۲۹-۱-۵ مجموعه $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}/_{\sim}$ یک مجموعه بی‌شمار است .

۵-۲-۴

(الف) چون $card A = card A'$ و $Card B = Card B'$ پس $A \sim A'$ و $B \sim B'$. چون $A \cap B = A' \cap B' = \phi$ پس بنا به ۵-۱-۵ (الف) ، $A \cup B \sim A' \cup B'$ و در نتیجه $Card(A \cup B) = Card(A' \cup B')$.

یعنی $a + b = Card(A' \cup B')$.

(ب) مانند بند (الف) ، $A \sim A'$ و $B \sim B'$ و در نتیجه بنابه ۵-۱-۵ (ب)، $A \times B \sim A' \times B'$. پس $Card(A \times B) = Card(A' \times B')$ ،

در نتیجه $ab = card(A' \times B')$

(ج) مانند بند (الف) $A \sim A'$ و $B \sim B'$ و در نتیجه بنابه ۵-۱-۵ (ج)

$B_A \sim B'_{A'}$. پس $Card(B_A) = Card(B'_{A'})$ و در نتیجه

$a^b = Card(B'_{A'})$

۹-۲-۵

(الف) فرض کنیم $a = Card\, A$ ، $b = Card\, B$ و $A \cap B = \Phi$. در اینصورت داریم: $a+b = Card(A \cup B) = Card(B \cup A) = b+a$

همچنین داریم: $ab = Card(A \times B) = Card(B \times A) = ba$

تساوی $Card(A \times B) = Card(B \times A)$ به این علت برقرار است که $A \times B \sim B \times A$.

(ب) فرض کنیم $a = Card\, A$ ، $b = Card\, B$ و $c = Card\, C$

بطوریکه $(A \cup B) \cap C = \Phi$ و $A \cap (B \cup C) = \Phi$. در اینصورت $B \cap C = \Phi$ و $A \cap B = \Phi$ و داریم:

$$(a+b)+c = Card[(A \cup B) \cup C] = Card[A \cup (B \cup C)] = a+(b+c)$$

و همچنین داریم:

$$(ab)c = Card[(A \times B) \times C] = Card[A \times (B \times C)] = a(bc)$$

زیرا که $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$

(ج) فرض کنیم $a = Card\, A$ ، $b = Card\, B$ و $c = Card\, C$

بطوریکه $B \cap C = \Phi$. در اینصورت $(A \times B) \cap (A \times C) = \Phi$ و داریم:

$$a(b+c) = Card[A \times (B \cup C)] = Card[(A \times B) \cup (A \times C)] = ab+ac$$

(د) فرض کنیم $a = Card\, A$ ، $b = Card\, B$ ، $c = Card\, C$ و $B \cap C = \Phi$.

در اینصورت بنابه ۷-۲-۵ (الف) ، ${}^{B\cup C}A \sim {}^{B}A \times {}^{C}A$ و در نتیجه داریم:

$$a^{b+c} = Card({}^{B\cup C}A) = Card({}^{B}A \times {}^{C}A) = a^b a^c$$

(هـ) فرض کنیم $a = Card\,A$ ، $b = Card\,B$ و $c = Card\,C$. در اینصورت بنابه ۷-۲-۵ (ب) ، ${}^{C}A \times {}^{C}B \sim {}^{C}(A\times B)$ و در نتیجه داریم :

$$(ab)^c = Card({}^{C}(A\times B)) = Card({}^{C}A \times {}^{C}B) = a^c b^c$$

(و) فرض کنیم $a = Card\,A$ ، $b = Card\,B$ و $c = Card\,C$ ، در اینصورت بنا به ۷-۲-۵ (ج) ، ${}^{C}({}^{B}A) \sim {}^{B\times C}A$ ودر نتیجه داریم :

$$(a^b)^c = Card[{}^{C}({}^{B}A)] = Card({}^{B\times C}A) = a^{bc}$$

<u>۱۱-۲-۵</u>

(الف) فرض کنیم $A \sim A'$ و $B \sim B'$ در اینصورت داریم :

$$A \preccurlyeq B \Longleftrightarrow A' \preccurlyeq B'$$

زیرا که فرض کنیم $f: A \to A'$ ، $g: B \to B'$ توابع دوسویی و $h: A \to B$ یک تابع یک بیک باشد ، در اینصورت تابع $h' = g \circ h \circ f^{-1}$ یک تابع یک بیک از A' به B' است و در نتیجه $A' \preccurlyeq B'$. بطریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر $A' \preccurlyeq B'$ آنگاه $A \preccurlyeq B$. بنابراین $A \preccurlyeq B \Longleftrightarrow A' \preccurlyeq B'$. حال داریم :

$$Card\,A \leqslant Card\,B \Longleftrightarrow A \preccurlyeq B \Longleftrightarrow A' \preccurlyeq B' \Longleftrightarrow Card\,A' \leqslant Card\,B'$$

(ب) فرض کنیم $A \sim A'$ و $B \sim B'$ ، در اینصورت داریم :

$$A \prec B \Longleftrightarrow A' \prec B'$$

زیرا که فرض کنیم $A < B$ • در اینصورت بنابه بند (الف) ، اگر $A' \leqslant B'$ آنگاه $A' \sim B'$ چون $A \sim A'$ و $B \sim B'$ پس $A \sim B$ که خلاف فرض است • پس $A' \not\sim B'$ و در نتیجه $A' < B'$ • بطریق مشابه می توان نشان داد که اگر $A' < B'$ آنگاه $A < B$ • پس داریم $A < B \Longleftrightarrow A' < B'$.

بنابراین داریم :

$$\mathrm{Card}\, A < \mathrm{Card}\, B \Longleftrightarrow A < B \Longleftrightarrow A' < B' \Longleftrightarrow \mathrm{Card}\, A' < \mathrm{Card}\, B'$$

۵-۲-۱٤

(الف) فرض کنیم $a = \mathrm{Card}\, A$ • چون تابع همانی روی A یک تابع یک بیک است پس $A \leqslant A$ و در نتیجه $a \leqslant a$•

(ب) فرض کنیم $a = \mathrm{Card}\, A$ • $b = \mathrm{Card}\, B$ و $c = \mathrm{Card}\, C$. چون $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ پس توابع یک بیک $f : A \to B$ و $g : B \to C$ وجود دارند • در اینصورت $g \circ f : A \to C$ یک تابع یک بیک است و در نتیجه $A \leqslant C$ • پس $a \leqslant c$ •

۵-۲-۱٦

(الف) فرض کنیم $a = \mathrm{Card}\, A$. چون $A \cup \Phi = A$ پس داریم :

$$a + 0 = \mathrm{Card}(A \cup \Phi) = \mathrm{Card}(A) = a$$

همچنین چون $A \times \Phi = \Phi$ پس داریم :

$$a 0 = \mathrm{Card}(A \times \Phi) = \mathrm{Card}\, \Phi = 0$$

چون $A^{\Phi} = \Phi$ پس داریم :

$$0^{a} = \mathrm{Card}(A^{\Phi}) = \mathrm{Card}(\Phi) = 0$$

البته در تساوی فوق $a \neq 0$.

چون $\{1\} \times A \sim A$ پس داریم :

$$1a = Card(\{1\} \times A) = Card\, A = a$$

چون ${}^{\{1\}}A \sim A$ پس داریم :

$$a^1 = Card({}^{\{1\}}A) = Card\, A = a$$

چون ${}^{A}\{1\} \sim \{1\}$ پس داریم :

$$1^a = Card({}^{A}\{1\}) = Card(\{1\}) = 1$$

(ب) فرض کنیم $a = Card\, A$ و $b = Card\, B$ · می دانیم که :

$$A \times B = \Phi \Longleftrightarrow A = \Phi \vee B = \Phi$$

پس داریم :

$$(ab = Card(A \times B) = 0) \Longleftrightarrow (a = Card\, A = 0 \vee b = Card\, B = 0)$$

(ج) فرض کنیم $a = Card\, A$ و $b = Card\, B$ · بسهولت می توان ثابتکرد که :

$$A \times B \sim \{1\} \Longleftrightarrow A \sim \{1\} \wedge B \sim \{1\}$$

پس داریم :

$$(ab = Card(A \times B) = 1) \Longleftrightarrow (a = Card\, A = 1 \wedge b = Card\, B = 1)$$

(د) بنا به ٦-٢-٥ (الف) داریم :

$1 + \aleph_0 = \aleph_0 = 2 + \aleph_0$ درحالیکه $2 \neq 1$

بنابه ٦-٢-٥ (ج) داریم :

$1\, \aleph_0 = \aleph_0 = 2\, \aleph_0$ درحالیکه $2 \neq 1$ ·

می دانیم که $1 < \aleph_0$ و $\aleph_0 \leqslant \aleph_0$ · درحالیکه

$1 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ و درنتیجه $1 + \aleph_0 \nless \aleph_0 + \aleph_0$ · می دانیم که

$1 < \aleph_0$ و $\aleph_0 \leqslant \aleph_0$ ، درحالیکه $1\aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0\aleph_0$ ودرنتیجه $1\aleph_0 \nless \aleph_0\aleph_0$

(هـ) توسط استقرا روی n نشان میدهیم که $na = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ مرتبه}}$. اگر $n=1$ آنگاه $1a = a$ و تساوی برقرار است ، حال فرض کنیم که تساوی برای $n-1$ درست باشد داریم :

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ مرتبه}} = \underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{n-1 \text{ مرتبه}} + a$$

بنابه فرض استقرا $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n-1 \text{ مرتبه}} = (n-1)a$ و در نتیجه $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ مرتبه}} = (n-1)a+a$ ، از قضیه ۸-۲-۵ نتیجه میشود که

$$(n-1)a+a = (n-1+1)a = na$$

پس $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ مرتبه}} = na$.

حال توسط استقرا روی n نشان میدهیم که $a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}}$ ، اگر $n=1$ آنگاه $a^1 = a$ تساوی برقرار است ، حال فرض کنیم که تساوی برای $n-1$ درست باشد ، در اینصورت داریم :

$$\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}} = \underbrace{(aa\cdots a)}_{n-1 \text{ مرتبه}}a$$

بنا به فرض استقرا $\underbrace{aa\cdots a}_{n-1 \text{ مرتبه}} = a^{n-1}$ و در نتیجه $\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}} = a^{n-1}a$.

بنا به ۸-۲-۵ (د) $a^{n-1}a = a^{n-1+1} = a^n$ و در نتیجه $\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}} = a^n$.

(و) می‌دانیم که : $(x,y) \subseteq [x,y) \subseteq [x,y] \subseteq \mathbb{R}$ و

$(x,y) \subseteq (x,y] \subseteq [x,y] \subseteq \mathbb{R}$

چون $(x,y) \sim \mathbb{R}$ پس $Card(x,y) = Card\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ • حال از قضیه شرو در برنشتاین نتیجه می‌شود که:

$$Card(x,y) = Card[x,y) = Card(x,y] = Card[x,y] = Card\mathbb{R} =$$

<u>۵-۳-۲</u>

بنابه ۱-۳-۵ اصل انتخاب نتیجه می‌دهد که اگر $f: A \to B$ پوشا باشد آنگاه f دارای یک معکوس راست‌است • حال برعکس فرض کنیم که اگر یک تابع $f: A \to B$ پوشا باشد آنگاه f دارای یک معکوس راست‌است • نشان می‌دهیم که اصل انتخاب برقرار است • برای اینکار کافیست ثابت کنیم که جمله بند (د) قضیه ۲-۳-۵ برقرار است • پس فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک مجموعه از مجموعه های غیر تهی باشد بطوریکه داشته باشیم :

$$X, Y \in \mathcal{A} \wedge X \neq Y \Longrightarrow X \cap Y = \phi$$

تعریف می‌کنیم :

$$f: \cup\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$f(x) = X$$

که در آن $x \in X$ در اینصورت f یک تابع است ، زیرا که داریم :

$$x, y \in \cup\mathcal{A} \wedge x = y \Longrightarrow \exists X, Y (X, Y \in \mathcal{A} \wedge x \in X \wedge y \in Y) \wedge x = y$$
$$\Longrightarrow x \in X \cap Y \Longrightarrow X \cap Y \neq \phi \Longrightarrow X = Y$$

حال چون $x \in X$ و $y \in Y$ پس $f(x) = X = Y = f(y)$ و در نتیجه

f یک تابع است • همچنین f پوشاست زیرا که داریم :

$$X\in\mathcal{A}\Rightarrow X\neq\phi\Rightarrow\exists x\,(x\in X)\Rightarrow f(x)=X$$

پس f پوشاست • بنابه فرض تابع $g:\mathcal{A}\longrightarrow\cup\mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه $f\circ g=i_A$ ، که درآن i_A تابع همانی روی $\mathcal{A}$ است • اگر $C=rang$ آنگاه $C\cap X=\{g(X)\}$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ • زیرا که $g(X)\in C$ وچون $f(g(X))=i_A(X)=X$ پس $g(X)\in X$ و در نتیجه $g(X)\in C\cap X$، همچنین اگر $x\in C\cap X$ آنگاه $x\in X$ و $x\in C$ و در نتیجه $Y\in\mathcal{A}$ وجود دارد بطوریکه $x=g(Y)$ • حال چون $f(x)=f(g(Y))=Y$ و چون $x\in X$ و در نتیجه $f(x)=X$ پس $Y=X$ • بنابراین $x=g(X)$ و در نتیجه $C\cap X=\{g(X)\}$ برای هر $X\in\mathcal{A}$ • پس برای هر $X\in\mathcal{A}$ مجموعه $C\cap X$ تک عضوی است •

۵-۳-۷

فرض کنیم $I\sim\bar{n}$ و $I=\{i_1,\ldots,i_n\}$ • پس $\mathcal{A}=\{A_{i_1},\ldots,A_{i_n}\}$.

چون $A_{i_j}\neq\phi$ برای هر $1\leqslant j\leqslant n$ پس عنصر a_j وجود دارد بطوریکه $a_j\in A_{i_j}$ برای هر $1\leqslant j\leqslant n$. حال تعریف می‌کنیم:

$$f:I\longrightarrow\bigcup_{j=1}^{n}A_{i_j}$$

$$f(i_j)=a_j$$

در اینصورت f یک تابع است و بعلاوه $f(i_j)\in A_{i_j}$ برای هر $1\leqslant j\leqslant n$.

پس $f\in\prod_{j=1}^{n}A_{i_j}$ و در نتیجه $\prod_{j=1}^{n}A_{i_j}\neq\phi$ •

حل مسائل فصل ٦

٦-١-٣

(الف) فرض کنیم P مجموعه همه گزاره ها باشد • در اینصورت $\vee : P\times P \longrightarrow P$ بطوریکه $\vee(p,q) = p\vee q$ یک تابع است • پس $\vee$ یک عمل دوتایی روی P می باشد •

(ب) مانند بند (الف) ، $\wedge$ یک عمل دوتایی روی P است•

(ج) ملاحظه می‌شود که $\cup : \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ بطوریکه $\cup(X,Y)=X\cup Y$ یک تابع می‌باشد و در نتیجه $\cup$ یک عمل دوتایی روی $\mathcal{P}(A)$ است •

(د) مانند بند (ج) ، $\cap$ یک عمل دوتایی روی $\mathcal{P}(A)$ است •

(هـ) ملاحظه می‌شود که $- : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ بطوریکه $-(x,y) = x - y$ یک تابع است و در نتیجه $-$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ می‌باشد •

(و) ملاحظه می‌شود که $* : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ بطوریکه $*(x,y)=x*y=\frac{x+y}{۲}$ یک تابع است و در نتیجه $*$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Q}$ می‌باشد •

(ز) ملاحظه می‌شود که $* : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ بطوریکه بزرگترین مقسم علیه مشترک x و y $= y = x*y = *(x,y)$ یک تابع است و در نتیجه $*$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{N}$ می‌باشد •

٦-١-٤

(الف) اگر عمل تقسیم ($\div$) یک عمل دوتایی روی $\mathbb{R}$ باشد آنگاه باید $\div : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بطوریکه $\div(x,y)=x\div y$ برای هر $x, y\in\mathbb{R}$ یک تابع باشد • ولی می دانیم که اگر $y=0$ آنگاه $x\div 0$ تعریف نمی‌شود ویک عدد حقیقی نیست•

بنابراین $\div$ یك تابع از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ نمی‌باشدو در نتیجه $\div$ یك عمل دوتایی روی $\mathbb{R}$ نیست •

(ب) ملاحظه می‌شود که $\div:(\mathbb{Q}-\{0\})\times(\mathbb{Q}-\{0\})\to\mathbb{Q}-\{0\}$ بطوریکه $\div(x,y)=x\div y$

یك تابع است و در نتیجه $\div$ یك عمل دوتایی روی $\mathbb{Q}-\{0\}$ می‌باشد •

(ج) اگر عمل تفاضل (-) یك عمل دوتایی روی $\mathbb{N}$ باشد آنگاه باید $-:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

بطوریکه $-(x,y)=x-y$ یك تابع باشد • ولی مثلاً برای $x=1$ و $y=2$

داریم $-(1,2)=1-2=-1\notin\mathbb{N}$ و در نتیجه - یك تابع از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$

نمی‌باشد • پس - یك عمل دوتایی روی $\mathbb{N}$ نیست •

(د) ملاحظه می‌شود که $*:\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)\longrightarrow\mathcal{P}(A)$ بطوریکه $*(X,Y)=X*Y=(X-Y)\cup(Y-X)$

یك تابع است و در نتیجه $*$ یك عمل دوتایی روی $\mathcal{P}(A)$ می باشد •

۸-۱-۶

(الف) $$X=\{-n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

$$-n,-m\in X\Longrightarrow n,m\in\mathbb{N}\Longrightarrow n+m\in\mathbb{N}\Longrightarrow(-n)+(-m)=-(n+m)\in X$$

پس X تحت عمل جمع بسته است •

(ب) می‌دانیم که $\sqrt{2}\in X$ درحالیکه $(\sqrt{2})(\sqrt{2})=2\notin X$ • پس

X تحت عمل ضرب بسته نیست •

(ج) می‌دانیم که $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}\in X$ درحالیکه $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\notin X$

پس X تحت عمل جمع بسته نیست •

(د) اگر $P, q \in X$ آنگاه P و q دو گزاره درستند و در نتیجه $P \wedge q$ نیز یک گزاره درست می‌باشد ، یعنی $P \wedge q \in X$. پس X تحت عمل $\wedge$ بسته است.

(هـ) فرض کنیم $B, C \in X$. در اینصورت B و C هردو زیر مجموعه های متناهی از A می‌باشند . پس $B \cup C$ نیز یک زیر مجموعه متناهی از A است. و در نتیجه $B \cup C \in X$. پس X تحت عمل $\cup$ بسته است .

(و) فرض کنیم $B, C \in X$. در اینصورت B و C هردو زیر مجموعه های شمارش پذیر از A می‌باشند . پس $B \cup C$ نیز یک زیر مجموعه شمارش پذیر از A است و در نتیجه $B \cup C \in X$. پس X تحت عمل $\cup$ بسته است .

(ز) چون $card A \geqslant ۲$ پس عناصر a و b وجود دارند بطوریکه $a \neq b$ و $a, b \in A$. در اینصورت $\{a\}, \{b\} \in X$ درحالیکه $\{a\} \cap \{b\} = \phi \notin X$.

پس X تحت عمل $\cap$ بسته نیست .

۶-۱-۹

(الف) عناصر $S_۳$ عبارتند از:

$$e' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}, r'_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}, r'_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$a' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}, c' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

پس $card\ S_۳ = ۶$.

ب)

$\circ$	e'	r_1'	r_2'	a'	b'	c'
e'	e'	r_1'	r_2'	a'	b'	c'
r_1'	r_1'	r_2'	e'	c'	a'	b'
r_2'	r_2'	e'	r_1'	b'	c'	a'
a'	a'	b'	c'	e'	r_1'	r_2'
b'	b'	c'	a'	r_2'	e'	r_1'
c'	c'	a'	b'	r_1'	r_2'	e'

ج) ملاحظه می‌شود که این کاملاً مشابه جدول ۵-۱-۶ است . بطور دقیق تر اگر تعریف کنیم $f: D_3 \to S_3$ بطوریکه $f(x) = x'$ آنگاه f یک تابع دوسویی است و بعلاوه داریم $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ برای هر x و $y \in D_3$.

۶-۱-۱۱

الف)
$$x * y = \frac{x+y}{2} = \frac{y+x}{2} = y * x$$

پس * جابجایی است . حال مثلاً برای ۱ ، ۲ و ۳ در $\mathbb{Q}$ داریم:

$$(1*2)*3 = \left(\frac{1+2}{2}\right)*3 = \frac{3}{2}*3 = \frac{\frac{3}{2}+3}{2} = \frac{9}{4}$$

و

$$1*(2*3) = 1*\left(\frac{2+3}{2}\right) = 1*\frac{5}{2} = \frac{1+\frac{5}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

ملاحظه می‌شود که $(1*2)*3 \neq 1*(2*3)$ و در نتیجه * شرکت پذیر نیست .

ب)
$$(x*y)*z = x*z = x$$

و

$$x*(y*z) = x*y = x$$

پس $(x*y)*z = x*(y*z)$ و در نتیجه * شرکت‌پذیر است .

حال مثلاً برای ۱ و ۲ در $\mathbb{N}$ داریم :

$$۱*۲=۱ \quad \text{و} \quad ۲*۱=۲$$

پس $۱*۲ \neq ۲*۱$ و در نتیجه * جابجایی نیست .

ج)

$$x*y = x+y+xy = y+x+yx = y*x$$

پس * جابجایی است . حال مثلاً برای ۱ ، ۲ و ۳ در $\mathbb{Z}$ داریم :

$$(۱*۲)*۳ = (۱+۲+۲)*۳ = ۵*۳ = ۵+۳+۱۵ = ۲۳$$

و

$$۱*(۲*۳) = ۱*(۲+۳+۶) = ۱*۱۱ = ۱+۱۱+۱۱ = ۲۳ \;...\; ۱+۱۱+۲۲ = ۳۵$$

پس $(۱*۲)*۳ \neq ۱*(۲*۳)$ و در نتیجه * شرکت‌پذیر نیست .

(د) برای ۱ و ۲ در $\mathbb{R} - \{0\}$ داریم :

$$۲ \div ۱ = ۲ \neq \frac{۱}{۲} = ۱ \div ۲$$

پس $\div$ جابجایی نیست . برای ۱ ، ۲ و ۳ در $\mathbb{R} - \{0\}$ داریم :

$$(۱ \div ۲) \div ۳ = \frac{۱}{۲} \div ۳ = \frac{۱}{۶}$$

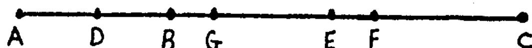
و

$$۱ \div (۲ \div ۳) = ۱ \div \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{۲}$$

پس $(۱ \div ۲) \div ۳ \neq ۱ \div (۲ \div ۳)$ و در نتیجه $\div$ شرکت‌پذیر نیست .

(هـ) $x*y = \overline{xy}$ نقطه وسط پاره خط $=$ نقطه وسط پاره خط $\overline{yx} = y*x$

پس * جابجایی است . حال نقاط A ، B و C را بصورت زیر در صفحه درنظر می‌گیریم .



فرض می کنیم که نقطه D وسط پاره خط $\overline{AB}$ ، نقطه E وسط پاره خط $\overline{DC}$ ، نقطه F وسط پاره خط $\overline{BC}$ و نقطه G وسط پاره خط $\overline{AF}$ باشند . در این صورت داریم :

$$(A*B)*C=D*C=E$$

و

$$A*(B*C)=A*F=G$$

ملاحظه می‌شود که $(A*B)*C\neq A*(B*C)$ و در نتیجه * شرکت پذیر نیست .

و) $(x,y)*(x',y')=(xx'+xy'+x'y,yy')=(x'x+x'y+xy',y'y)=(x',y')*(x,y)$

پس * جابجایی است.

$$((x,y)*(x',y'))*(x'',y'')=(xx'+xy'+x'y,yy')*(x'',y'')$$
$$=((xx'+xy'+x'y)x''+(xx'+xy'+x'y)y''+x''yy',yy'y'')$$
$$=(xx'x''+xy'x''+x'yx''+xx'y''+xy'y''+x'yy''+x''yy',yy'y'')$$
$$=(xx'x''+xx'y''+xx''y'+xy'y''+x'x''y+x'y''y+x''y'y,yy'y'')$$
$$=(x(x'x''+x'y''+x''y')+xy'y''+(x'x''+x'y''+x''y')y,yy'y'')$$
$$=(x,y)*(x'x''+x'y''+x''y',y'y'')$$
$$=(x,y)*((x',y')*(x'',y''))$$

پس * شرکت‌پذیر است.

ز) $b*c=e\neq a=c*b$

پس * جابجایی نیست . برای b ، c و d در A داریم:

$$(b*c)*d=e*d=c$$

و

$$b*(c*d)=b*e=d$$

پس $(b*c)*d \neq b*(c*d)$ و در نتیجه * شرکت‌پذیر نیست •

۶-۱-۱۵

(الف) برای ۱ ، ۲ و ۳ در $\mathbb{N}$ داریم :

$$۱*(۲+۳)=۱*۵=۱ \quad \text{و} \quad ۱*۲+۱*۳=۱+۱=۲$$

پس $۱*(۲+۳) \neq ۱*۲+۱*۳$ و در نتیجه * نسبت‌به جمع پخشی نیست•

(ب) برای ۱ ، ۲ و ۳ در $\mathbb{Z}$ داریم :

$$۱*(۲+۳)=۱*۵=۱+۵+۵=۱۱$$

و

$$۱*۲+۱*۳=۱+۲+۲+۱+۳+۳=۱۲$$

پس $۱*(۲+۳) \neq ۱*۲+۱*۳$ و در نتیجه * نسبت‌به جمع پخشی نیست •

(ج)

$$\begin{aligned} X \cap (Y*Z) &= X \cap [(Y-Z) \cup (Z-Y)] \\ &= [X \cap (Y-Z)] \cup [X \cap (Z-Y)] \\ &= [(X \cap Y)-(X \cap Z)] \cup [(X \cap Z)-(X \cap Y)] \\ &= (X \cap Y)*(X \cap Z) \end{aligned}$$

چون عمل $\cap$ جابجائی است‌پس بنابه ۱٤-۱-۶ ، $\cap$ نسبت‌به * پخشی‌میباشد•

(د)

$$\begin{aligned} (x,y)*_2[(x',y')*_1(x'',y'')] &= (x,y)*_2(x'+x'',y'+y'') \\ &= (x(x'+x''),y(y'+y'')) \\ &= (xx'+xx'',yy'+yy'') \\ &= (xx',yy')*_1(xx'',yy'') \\ &= [(x,y)*_2(x',y')]*_1[(x,y)*_2(x'',y'')] \end{aligned}$$

چون $*_2$ جابجایی است‌پس بنابه ۱٤-۱-۶ ، $*_2$ نسبت‌به $*_1$ پخشی می‌باشد •

۳-۲-۶

(الف) $dom(f *_1 g) = A = dom(g *_1 f)$ و بعلاوه برای هر $x \in A$ داریم :

$$(f *_1 g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g *_1 f)(x)$$

پس $f *_1 g = g *_1 f$ و در نتیجه $*_1$ جابجایی است • همچنین

$dom[(f *_1 g) *_1 h] = A = dom[f *_1 (g * h)]$ و بعلاوه برای هر $x \in A$ داریم :

$$[(f *_1 g) *_1 h](x) = (f *_1 g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g *_1 h)(x) = [f *_1 (g *_1 h)](x)$$

پس $(f *_1 g) *_1 h = f *_1 (g *_1 h)$ و در نتیجه $*_1$ شرکت‌پذیر است •

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $*_2$ جابجایی و شرکت‌پذیر است • همچنین

داریم :
$$dom[f *_2 (g *_1 h)] = A = dom[(f *_2 g) *_1 (f *_2 h)]$$

و بعلاوه برای هر $x \in A$ داریم :

$$[f *_2 (g *_1 h)](x) = f(x)(g *_1 h)(x) = f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$$
$$= (f *_2 g)(x) + (f *_2 h)(x) = [(f *_2 g) *_1 (f *_2 h)](x)$$

پس $f *_2 (g *_1 h) = (f *_2 g) *_1 (f *_2 h)$ و چون $*_2$ جابجایی است

پس $*_2$ نسبت‌به $*_1$ پخشی می‌باشد •

(ب)
$$[x] \oplus [y] = [x + y] = [y + x] = [y] \oplus [x]$$

پس $\oplus$ جابجایی است•

$$([x] \oplus [y]) \oplus [z] = [x + y] \oplus [z] = [(x + y) + z] = [x + (y + z)]$$
$$= [x] \oplus [y + z] = [x] \oplus ([y] \oplus [z])$$

پس $\oplus$ شرکت‌پذیر است • بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $\odot$ جابجایی و

شرکت‌پذیر است .

$$[x]\odot([y]+[z])=[x]\odot[y+z]=[x(y+z)]=[xy+xz]$$
$$=[xy]\oplus[xz]=([x]\odot[y])\oplus([x]\odot[z])$$

چون $\odot$ جابجایی است پس $\odot$ نسبت به $\oplus$ پخشی می‌باشد .

٦-٢-٦

(الف) عنصر همانی ندارد .

(ب) ۱ عنصر همانی است زیرا که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $1n=n1=n$.

(ج) جایگشت همانی یعنی $e=\begin{pmatrix}1\,2\,\cdots\cdots n\\1\,2\,\cdots\cdots n\end{pmatrix}$ عنصر همانی است . زیرا که برای هر $f\in S_n$ داریم $f\circ e=e\circ f=f$.

(د) عنصر همانی ندارد .

(هـ) ϕ عنصر همانی است . زیرا که داریم :

$$X*\phi=(X-\phi)\cup(\phi-X)=X\cup\phi=X$$

و

$$\phi*X=(\phi-X)\cup(X-\phi)=\phi\cup X=X$$

(و) ϕ عنصر همانی است زیرا که داریم : $X\cup\phi=X=\phi\cup X$

(ز) همانطوریکه در جدول عمل $\circ$ روی D_3 ملاحظه می‌شود e عنصر همانی است .

(ح) عنصر همانی ندارد .

(ط) تابع $O:A\longrightarrow\mathbb{R}$ بطوریکه $O(x)=0$ برای هر $x\in A$ عنصر همانی $(A_{\mathbb{R}};*_1)$ است. زیرا که $dom(f*_1 O)=A=dom f$

و بعلاوه برای هر $x\in A$ داریم :

$$(f*_1 O)(x)=f(x)*_1 O(x)=f(x)+0=f(x)$$

پس $f *_1 o = f$ و چون $*_1$ جابجایی است پس $o *_1 f = f$ و در نتیجه o عنصر همانی می‌باشد • تابع $1 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ بطوریکه $1(x) = 1$ برای هر $x \in A$ عنصر همانی $(A_{\mathbb{R}} ; *_2)$ است • زیرا که $dom\,(f *_2 1) = A = dom f$ و بعلاوه برای هر $x \in A$ داریم :

$$(f *_2 1)(x) = f(x)1(x) = f(x)1 = f(x)$$

پس $f *_2 1 = f$ و چون $*_2$ جابجایی است پس $1 *_2 f = f$ و در نتیجه 1 عنصر همانی می‌باشد •

ی) $[o]$ عنصر همانی $(\mathbb{Z}_n ; \oplus)$ است • زیرا که داریم :

$$[x] \oplus [o] = [x + o] = [x]$$

چون $\oplus$ جابجایی است پس $[o] \oplus [x] = [x]$ و در نتیجه $[o]$ عنصر همانی است • $[1]$ عنصر همانی $(\mathbb{Z}_n ; \odot)$ است• زیرا که داریم :

$$[x] \odot [1] = [x1] = [x]$$

چون $\odot$ جابجایی است پس $[1] \odot [x] = [x]$ و در نتیجه $[1]$ عنصرهمانی است•

۹-۲-۶

(الف)

$$(x, o), (y, o) \in B \Longrightarrow (x, o) *_1 (y, o) = (x + y, o + o) = (x + y, o) \in B$$

پس B تحت عمل $*_1$ بسته است •

$$(x, o), (y, o) \in B \Longrightarrow (x, o) *_2 (y, o) = (xy, oo) = (xy, o) \in B$$

پس B تحت عمل $*_2$ بسته است•

(o, o) عنصرهمانی $(B ; *_1)$ و $(1, o)$ عنصرهمانی $(B ; *_2)$ است• زیرا که داریم :

$$(x, o) *_1 (o, o) = (x + o, o + o) = (x, o)$$

و چون $*_1$ جابجایی است پس $(x, 0) *_1 (0, 0) = (x, 0)$.

$$(x, 0) *_2 (1, 0) = (x1, 00) = (x, 0)$$

و چون $*_2$ جابجایی است پس $(x, 0) *_2 (x, 0) = (1, 0)$.

(ب)

$$x+y\sqrt{2}, x'+y'\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}) \Rightarrow (x+y\sqrt{2})+(x'+y'\sqrt{2}) = (x+x')+(y+y')\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$$

پس $Q(\sqrt{2})$ تحت عمل + بسته است .

$$x+y\sqrt{2}, x'+y'\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}) \Rightarrow (x+y\sqrt{2})(x'+y'\sqrt{2}) = (xx'+2yy')+(xy'+yx')\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$$

پس $Q(\sqrt{2})$ تحت عمل . بسته است .

عنصر $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ عنصر همانی $(Q(\sqrt{2}), +)$ است . زیرا که داریم :

$$(x+y\sqrt{2}) + 0 = 0 + (x+y\sqrt{2}) = x+y\sqrt{2}$$

عنصر $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ عنصر همانی $(Q(\sqrt{2}), \cdot)$ است . زیرا که داریم:

$$(x+y\sqrt{2})1 = 1(x+y\sqrt{2}) = x+y\sqrt{2}$$

۶-۲-۱۲

(الف) ۱ و ۱- عناصر معکوس پذیرند . زیرا که $1 = 1 \cdot 1$ و $1 = (-1)(-1)$.

(ب) هر عنصر Z_4 معکوس پذیر است . زیرا که برای هر $[x] \in Z_4$ داریم:

$$[x] \oplus [4-x] = [x+4-x] = [4] = [0]$$

و چون $\oplus$ جابجایی است پس $[4-x] \oplus [x] = [0]$.

(ج) $[1]$ و $[3]$ عناصر معکوس پذیرند . زیرا که داریم:

و

$$[1]\odot[1]=[1]$$

$$[3]\odot[3]=[9]=[1]$$

(د) همانطوریکه در جدول $\circ$ روی S_3 ملاحظه می‌شود هرعنصر S_3 معکوس‌پذیر است ·

(هـ) فقط 0 معکوس پذیر است زیرا که داریم: $0+0=0$

(و) فقط A معکوس پذیر است · زیرا که $A\cap A=A$ ·

(ز) در این تمرین α عنصر همانی است و α و e عناصر معکوس پذیرند · زیرا کــه $\alpha*\alpha=\alpha$ ، $e*e=\alpha$ ·

<u>۱۴-۲-۶</u>

(الف) برای هر $x\in\mathbb{Q}-\{0\}$ چون $x\neq 0$ پس $\frac{1}{x}\in\mathbb{Q}-\{0\}$ و بعـــلاوه داریم $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1$ · پس هر $x\in\mathbb{Q}-\{0\}$ معکـــوس پذیر است و معکوسش مساوی $\frac{1}{x}$ می‌باشد ·

(ب) اگر i_A تابع همانی روی A باشد آنگاه i_A عنصر همانی $(S_A$ و $\circ)$ · حال برای هر $f\in S_A$ ، چون f یك تابع دوسویی روی A است پس تابع معکوس f وجود دارد و بعلاوه یك تابع دوسویی روی A است · بنابراین اگر f^{-1} تابع معکوس f باشد آنگاه $f^{-1}\in S_A$ و بعلاوه داریم $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=i_A$. پس معکوس هر عنصر $f\in S_A$ وجود دارد و معکوس f مساوی f^{-1} است·

(ج) این تمرین درست نیست زیرا که $(\mathbb{R}-\{0\}$ و $\div)$ عنصر همانی ندارد ·

(د) $(0,0,\dots,0)$ عنصر همانی است و برای هر $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

داریم :
$$(x_1,\dots,x_n)*(-x_1,\dots,-x_n)=(x_1-x_1,\dots,x_n-x_n)=(0,\dots,0)$$

بطریق مشابه $(-x_1,\dots,-x_n)*(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)$ و در نتیجه هر عنصر $(x_1,\dots,x_n)$ معکوس پذیر است و معکوسش مساوی $(-x_1,\dots,-x_n)$ می‌باشد .

۶-۲-۱۶

(الف) چون $0=(-a)+a=a+(-a)$ پس $(-a)-=a$. همچنین

چون داریم : $(a+b)+((-b)+(-a))=((a+b)+(-b))+(-a)$

$$=(a+(b+(-b)))+(-a)$$
$$=(a+0)+(-a)$$
$$=a+(-a)$$
$$=0$$

و بطریق مشابه $((-b)+(-a))+(a+b)=0$ پس $-(a+b)=(-b)+(-a)$

(ب) اثبات این بند مشابه اثبات بند (الف) با این تفاوت که بجای عمل + ، عمل . قرار می‌گیرد .

۶-۲-۲۰

(الف) یک گروه نیست زیرا که هرعنصر معکوس ندارد .

(ب) یک گروه نیست زیرا که هر عنصر معکوس ندارد .

(ج) یک گروه نیست زیرا که در تمرین ۶-۱-۱۱ (ج) ، نشان دادیم * شرکت‌پذیر نیست .

(د) با توجه به جدول‌روی D_3 ملاحظه می‌شود که (D_3, o) یک گروه است‌ولی

آبلی نیست ۰

(هـ) $(E ; +)$ یك گروه آبلی است ۰

(و) یك گروه نیست زیرا که هر عنصر معکوس ندارد ، البته درحالتی که $A \neq \phi$ ۰ درحالتی که $A = \phi$ آنگاه $(\mathcal{P}(A) ; \cup)$ یك گروه آبلی است۰

(ز) یك گروه نیست زیرا که هر عنصر معکوس ندارد ، البته درحالتی که $A \neq \phi$ ۰ در حالتی که $A = \phi$ آنگاه $(\mathcal{P}(A) ; \cap)$ یك گروه آبلی است۰

(ح) یك گروه آبلی است ۰

(ط) در تمرین ۱۱-۱-۶ (الف) ، ملاحظه شدکه $*$ شرکت‌پذیر نیست ، پس $(\mathbb{Q} , *)$ یك گروه نمی‌باشد ۰

(ی) باتوجه به جدول $\circ$ روی S_3 ملاحظه می‌شودکه $(S_3 ; \circ)$ یك گروه است ولی آبلی نمی‌باشد ۰

<u>۶-۲-۲۳</u>

(الف)

بنا به پخشی بودن $*_2$ نسبت‌به $*_1$: $(x *_2 y) *_1 (x' *_2 y) = (x *_1 x') *_2 y$

بنا به تساوی $x *_1 x' = e$: $= e *_2 y$

بنا به قضیه ۶-۲-۲۲ : $= e$

و

بنابه پخشی بودن $*_2$ نسبت‌به $*_1$: $(x' *_2 y) *_1 (x *_2 y) = (x' *_1 x) *_2 y$

بنا به تساوی $x' *_1 x = e$: $= e *_2 y$

بنا به قضیه ۶-۲-۲۲ : $= e$

پس $(x *_2 y)' = x' *_2 y$

(ب) اثبات‌این بند شبیه اثبات‌بند (الف) است ۰

(ج) بنا به بند (الف) :
$$x' *_2 y' = (x *_2 y')'$$
بنا به بند (ب) :
$$= ((x *_2 y)')'$$
$$= x *_2 y$$

۶-۲-۲۶

(الف) یك زیرگروه نیست زیرا كه $(H ; +)$ یك گروه نیست.

(ب) یك زیرگروه است زیرا كه $(Q ; +)$ یك گروه است .

(ج) با توجه به جدول D_3 ملاحظه می‌شود كه $(H ; o)$ یك گروه است و در نتیجه یك زیرگروه می‌باشد .

(د) با توجه به جدول D_3 ملاحظه می‌شود كه H نسبت به عمل o بسته نیست زیرا كه مثلاً $a o r_1 = b \notin H$. پس یك زیرگروه نمی‌باشد .

(هـ) چون $(H ; +)$ یك گروه است پس یك زیرگروه می‌باشد .

۶-۲-۲۸

فرض كنیم كه $(G ; *)$ یك گروه آبلی و $(H ; *)$ یك زیرگروه $(G ; *)$ باشد . در اینصورت $(H ; *)$ یك گروه است و بعلاوه داریم :
$$x, y \in H \Longrightarrow x, y \in G \longrightarrow x * y = y * x$$
بنابراین $(H ; *)$ یك گروه آبلی است.

۶-۲-۳۱

(الف) یك حلقه است .

(ب) یك حلقه نیست زیرا كه عناصر نسبت به عمل + معكوس ندارند .

(ج) یك حلقه است.

(د) یك حلقه نیست زیرا که ـــ شرکت پذیر نیست •

(هـ) یك حلقه نیست زیرا که عناصر نسبت به عمل $\cup$ معکوس ندارند • البته درحالتی که $A \neq \phi$. اگر $A = \phi$ آنگاه یك حلقه است•

(و) یك حلقه است •

(ز) یك حلقه است •

۶-۲-۳۳

بنا به تعریف $y-z$: $x(y-z) = x(y+(-z))$

بنابه پخشی بودن ضرب نسبت به جمع: $= xy + x(-z)$

بنا به تمرین ۲۳-۲-۶ (ب) : $= xy + (-(xz))$

بنا به تعریف تفاضل : $= xy - xz$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $(x-y)z = xz - yz$.

۶-۲-۳۶

(الف) عدد ۱ عنصر همانی نسبت به عمل • است و در نتیجه یك حلقه یکانی می‌باشد •

(ب) تابع $1 : A \to \mathbb{R}$ بطوریکه $1(x) = 1$ برای هر $x \in A$ عنصر همانی نسبت بـــه عمل • است و در نتیجه یك حلقه یکانی می‌باشد •

(ج) A عنصر همانی نسبت به عمل • است و در نتیجه حلقه یکانی است•

(د) یك حلقه یکانی نیست زیرا که عنصر همانی نسبت به عمل • ندارد •

۶-۲-۳۸

(الف) فرض کنیم ۱ و $1'$ دو عنصر واحد R باشند • در اینصورت چون ۱ عنصرواحد R است و $1' \in R$ پس $1' = 11'$. همچنین چون $1'$ عنصر واحد R است و $1 \in R$ پس $1 = 11'$.

بنابراین $1'=1$ و در نتیجه عنصر واحد R یکتاست •

(ب) بنا به تمرین ۲۳-۲-۶ (الف) ، $(-1)x=-(1x)$.چون $1x=x$ پس $(-1)x=-x$.بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $x(-1)=-x$.

بنابراین

$$(-1)x=x(-1)=-x$$

۶-۲-۴۱

(الف) چون • جابجایی است پس این حلقه جابجایی می‌باشد •

(ب) اگر $f,g\in A_{\mathbb{R}}$ آنگاه $\operatorname{dom} fg=A=\operatorname{dom} gf$ و بعلاوه برای هر $x\in A$ داریم :

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(gf)(x)$$

پس $fg=gf$ و در نتیجه حلقه جابجایی است•

(ج) برای هر $X,Y\in\mathcal{P}(A)$ داریم :

$$XY=X\cap Y=Y\cap X=YX$$

پس این حلقه جابجایی است •

(د) چون • جابجایی است پس این حلقه جابجایی می‌باشد •

۶-۲-۴۴

(الف)

$$x,y\in S\Longrightarrow x,y\in R\Longrightarrow xy=yx$$

پس $(S;+,\cdot)$ جابجایی است•

(ب) فرض کنیم $R=\mathbb{Z}$ و $S=E$ مجموعه اعداد زوج در $\mathbb{Z}$ باشد • دراینصورت $(R;+,\cdot)$ یکانی است در صورتیکه $(S;+,\cdot)$ یکانی نیست • البته در اینجا + و • ، جمع و ضرب معمولی اعداد هستند •

(ج) حلقه $(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$ یك حلقه یکانی است و عنصر همانی آن نسبت به عمل • مساوی

؛ ۱ و ۱) است. حال اگر $S=\{(x,0)|x\in R\}$ آنگاه $(S;+,\cdot)$ یك زیر حلقه $(R^2;+,\cdot)$ بوده و $(S;+,\cdot)$ یك حلقه یكانی با عنصر همانی نسبت به عمل $\cdot$ ، $(1,0)$ می‌باشد . در اینجا ملاحظه می‌شود که $(1,0)\neq(1,1)$.

۶-۲-۴۷

(الف) بدیهی است که یك هیات همه خواص یك حلقه یكانی و جابجایی را دارامی‌باشد.

(ب) $(\mathbb{Z};+,\cdot)$ یك حلقه یكانی و جابجایی است در حالیكه یك هیات نیست زیرا که عناصر نسبت به عمل $\cdot$ معكوس ندارند .

۶-۲-۴۹

فرض کنیم $xy=0$ و $x\neq 0$. در اینصورت چون $x\neq 0$ پس x^{-1} در F وجود دارد . پس داریم :

$$xy=0 \Rightarrow x^{-1}(xy)=x^{-1}0=0 \Rightarrow (x^{-1}x)y=0 \Rightarrow 1y=0 \Rightarrow y=0$$

بنابراین اگر $xy=0$ آنگاه $x=0$ یا $y=0$.

۶-۲-۵۲

(الف) $a\in R^+ \Longleftrightarrow a-0\in R^+ \Longleftrightarrow a>0$

(ب) در اینجا فرض می‌کنیم که R بیش از یك عنصر دارد . نشان می‌دهیم که $1\in R^+$.
بنابه ۶-۲-۳۷ ، $1\neq 0$ پس $1\in R^+$ یا $-1\in R^+$. اگر $-1\in R^+$ آنگاه $1=(-1)(-1)\in R^+$ ،
که یك تناقض است . پس باید داشته باشیم $1\in R^+$. بنابه بند (الف) ، $1>0$.

(ج) اگر $a=0$ آنگاه $a^2+1=1\in R^+$. فرض کنیم $a\neq 0$ ، در اینصورت $a\in R^+$ یا $-a\in R^+$. اگر $a\in R^+$ آنگاه $a^2\in R^+$. اگر $-a\in R^+$ آنگاه $a^2=(-a)(-a)\in R^+$. پس در هرحالت $a^2\in R^+$. چون $1\in R^+$ پس $a^2+1\in R^+$

$a^2+1>0$ و در نتیجه .

د) $a \geqslant 0 \Longleftrightarrow a=0 \vee a>0 \Longleftrightarrow a=0 \vee a=a-0 \in R^+ \Longleftrightarrow -a=0 \vee$
$0-(-a)=0+a=a \in R^+ \Longleftrightarrow -a=0 \vee -a<0 \Longleftrightarrow -a \leqslant 0$

هـ) $a>0 \wedge b>0 \Longrightarrow a \in R^+ \wedge b \in R^+ \Longrightarrow ab \in R^+ \Longrightarrow ab>0$
$a<0 \wedge b<0 \Longrightarrow -a>0 \wedge -b>0 \Longrightarrow -a \in R^+ \wedge -b \in R^+ \Longrightarrow ab=$
$=(-a)(-b) \in R^+ \Longrightarrow ab>0$

و

$a>0 \wedge b<0 \Longrightarrow a>0 \wedge -b>0 \Longrightarrow a \in R^+ \wedge -b \in R^+ \Longrightarrow -(ab)=$
$=a(-b) \in R^+ \Longrightarrow 0-(ab) \in R^+ \Longrightarrow ab<0$

و

$a \leqslant b \Longleftrightarrow a=b \vee a<b \Longleftrightarrow -a=-b \vee b-a \in R^+ \Longleftrightarrow -a=-b \vee (-a)-$
$-(-b) \in R^+ \Longleftrightarrow -a=-b \vee -b<-a \Longleftrightarrow -b \leqslant -a$

(و)

$a \leqslant b \Longleftrightarrow a=b \vee a<b \Longleftrightarrow a=b \vee b-a \in R^+ \Longleftrightarrow a+c=b+c \vee$
$\vee (b+c)-(a+c) \in R^+ \Longleftrightarrow a+c=b+c \vee a+c<b+c \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a+c \leqslant b+c$

و

$a \leqslant b \wedge c \geqslant 0 \Longrightarrow (a=b \vee a<b) \wedge (c=0 \vee c>0)$

اگر $c=0$ آنگاه $ac=0=bc$ و در نتیجه $ac \leqslant bc$ پس فرض کنیم $c>0$.

در اینصورت داریم
$(a=b \vee a<b) \wedge (c>0) \Rightarrow (a=b \wedge c>0) \vee (a<b \wedge c>0)$
$\Rightarrow ac=bc \vee (b-a \in R^+ \wedge c \in R^+)$
$\Rightarrow ac=bc \vee (bc-ac=(b-a)c \in R^+)$

$$\Longrightarrow ac = bc \ \vee ac < bc$$

$$\Longrightarrow ac \leqslant bc$$

بنابراین داریم : $a \leqslant b \wedge c \geqslant 0 \Longrightarrow ac \leqslant bc$

٦-٢-٥٤

(الف)

$$|-a| = \begin{cases} -a ; & \text{اگر } -a > 0 \\ 0 ; & \text{اگر } -a = 0 \\ a ; & \text{اگر } -a < 0 \end{cases} = \begin{cases} -a ; & \text{اگر } a < 0 \\ 0 ; & \text{اگر } a = 0 \\ a ; & \text{اگر } a > 0 \end{cases} = |a|$$

نشان می‌دهیم $a \leqslant |a|$. اگر $a \geqslant 0$ آنگاه $a = |a|$ و درنتیجه $a \leqslant |a|$.
فرض کنیم $a < 0$. دراینصورت $|a| = -a$. چون $a < 0$ پس $-a > 0$ و درنتیجه $|a| = -a > a$. پس $a \leqslant |a|$. بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $-|a| \leqslant a$
و درنتیجه $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

(ب)

$$|ab| = \begin{cases} ab ; & \text{اگر } ab > 0 \\ 0 ; & \text{اگر } ab = 0 \\ -(ab) ; & \text{اگر } ab < 0 \end{cases} = \begin{cases} ab ; & \text{اگر } (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0) \\ 0 ; & \text{اگر } a=0 \vee b=0 \\ -(ab) ; & \text{اگر } (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0) \end{cases}$$

$$= |a||b|$$

ج) اگر $a=0$ یا $b=0$ آنگاه $a+b=b$ یا $a+b=a$ و درنتیجه $|a+b| = |b| = |a| + |b|$ یا $|a+b| = |a| = |a| + |b|$. پس در اینصورت $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. فرض کنیم $a \neq 0$ و $b \neq 0$. در اینصــورت

هریک از حالات زیر ممکن است اتفاق بیافتد :

$$(a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0) \vee (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$$

اگر $a>0$ و $b>0$ آنگاه $a+b>0$ و در نتیجه $|a+b|=a+b=|a|+|b|$.

اگر $a<0$ و $b<0$ آنگاه $a+b<0$ و در نتیجه $|a+b|=-(a+b)=-a-b=|a|+|b|$.

فرض کنیم $a>0$ و $b<0$ • در اینصورت $a+b>0$ یا $a+b<0$ • اگر $a+b>0$ آنگاه $|a+b|=a+b$ • و چون $b<0$ پس $-b>0$ و در نتیجه $b<-b$ • پس $a+b<a-b$ و در نتیجه $|a+b|=a+b<a-b=|a|+|b|$! اگر $a+b<0$ ، آنگاه $|a+b|=-(a+b)$ وچون $a>0$ پس $-a<0$ و در نتیجه $-a<a$ • پس $-a-b<a-b$ و در نتیجه

$$|a+b|=-(a+b)=-a-b<a-b=|a|+|b|$$

حال فرض کنیم $a<0$ و $b>0$ • در اینصورت $a+b>0$ یا $a+b<0$. اگر $a+b>0$ آنگاه $|a+b|=a+b$ وچون $a<0$ پس $-a>0$ و در نتیجه $a<-a$. پس $a+b<-a+b$ و در نتیجه

$$|a+b|=a+b<-a+b=|a|+|b|$$

اگر $a+b<0$ آنگاه $|a+b|=-(a+b)$ وچون $b>0$ پس $-b<0$ و در نتیجه $-b<b$. پس $-a-b<-a+b$ و در نتیجه

$$|a+b|=-(a+b)=-a-b<-a+b=|a|+|b|$$

بنابراین درهرحالت داریم :

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

(د) اثبات این بند نیز شبیه اثبات بند (ج) است و باید اعداد a و b را درحالات مختلف از نظر بزرگتر ، کوچکتر یا مساوی صفر بودن در نظر گرفت و سپس $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|$ را در هریک از حالات ممکنه اثبات نمود •

۶-۲-۵۵

ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $a \in F$ ، اگر $a>0$ آنگاه $\overset{-1}{a}>0$. روشن

است که $a^{-1} \neq 0$. پس $a^{-1} > 0$ یا $a^{-1} < 0$. اگر $a^{-1} < 0$ آنگاه چون $a > 0$ پس $aa^{-1} < 0$ و در نتیجه $1 < 0$ که یک تناقض است زیرا که $1 > 0$.

پس $a^{-1} > 0$. حال داریم:

$$a \leqslant b \wedge a^{-1} > 0 \Longrightarrow aa^{-1} \leqslant ba^{-1} \Longrightarrow 1 \leqslant ba^{-1}$$

چون $b^{-1} > 0$، پس $b^{-1} \leqslant b^{-1}ba^{-1}$ و در نتیجه $0 < b^{-1} \leqslant a^{-1}$.

<u>۶-۳-۴</u>

(الف) فرض کنیم $x, y \in G$ در اینصورت داریم:

$$f(x\ y) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

پس f یک همریختی است.

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x^{-1} = y^{-1} \Longrightarrow x = y$$

پس f یک بیک است.

$$y \in G \Longrightarrow x = y^{-1} \in G$$

و داریم:

$$f(x) = x^{-1} = (y^{-1})^{-1} = y$$

پس f پوشاست. بنابراین f یک یکریختی می‌باشد.

(ب)

$$f(x+y) = 0 = 0 + 0 = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = 0 = 0 \cdot 0 = f(x)f(y)$$

پس f یک همریختی است.

(ج)

$$f(x+y) = (x+y, 0) = (x,0) + (y,0) = f(x) + f(y)$$

و

$$f(xy) = (xy, 0) = (x,0)(y,0) = f(x)f(y)$$

پس f یک همریختی است.

$$f(x)=f(y) \Rightarrow (x,0)=(y,0) \Rightarrow x=y$$

پس f یک بیک است • بنابراین f یک همریختی یک بیک می‌باشد •

۶-۳-۶

الف) $y,y' \in f[A] \Rightarrow \exists x,x' \left(x,x' \in A \wedge y=f(x) \wedge y' \in f(x')\right)$

در اینصورت داریم:

$$y *' y' = f(x) *' f(x') = f(x * x') \in f[A]$$

پس $f[A]$ تحت عمل $*'$ بسته است •

ب) بنا به بند (الف) $f[G]$ تحت عمل $*'$ بسته است • چون $*'$ روی G' شرکت‌پذیر است پس $*'$ روی $f[G]$ شرکت‌پذیر است • فرض کنیم e و e' بترتیب عناصر همانی G و G' باشند • نشان می‌دهیم که $e'=f(e)$.

داریم : $f(e) *' f(e) = f(e * e) = f(e)$

پس بنا به قضیه ۶-۲-۲۷ (الف) ، $f(e)$ عنصر همانی G' است و درنتیجه $e'=f(e)$ • پس $e'=f(e) \in f[G]$ • فرض‌کنیم y یک عنصردلخواه $f[G]$ باشد • در اینصورت $x \in G$ وجود دارد بطوریکه $y=f(x)$ اگر x^{-1} معکوس x در G باشدآنگاه نشان می‌دهیم که $f(x^{-1}) \in f[G]$ معکوس $f(x)$ در $f[G]$ است • زیرا که داریم :

$$f(x) *' f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$$

$$f(x^{-1}) * f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e'$$

پس $\bar{y}^{1} = f(\bar{x}^{1})$ • بنابراین $(f[G]; *')$ یك گروه و در نتیجه یك زیر گروه $(G'; *')$ است •

(ج) مانند بند (ب) ، $(f[R]; +)$ یك زیر گروه $(R'; +)$ است و چون $(R'; +)$ آبلی است پس بنا به تمرین ۲۸-۲-٦ ، $(f[R]; +)$ آبلی است • چون • روی R' شرکت پذیر است پس روی $f[R]$ شرکت پذیر است و چون • نسبت به + روی R' پخشی است پس • نسبت به + روی $f[R]$ پخشی می باشد •بنابراین $(f[R]; +, \cdot)$ یك زیر حلقه $(R'; +, \cdot)$ است •

(د) اثبات این بند مانند اثبات بند های (ب) و (ج) است •

(هـ) چون $(S_3; \circ)$ یك گروه غیر آبلی و $(\mathbb{Z}_6; +)$ یك گروه آبلی است پس بنا به ۵-۳-٦ (د) ، این دو گروه نمی توانند یکریخت باشند •

<u>۹-۳-٦</u>

(الف) تعریف می کنیم

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x$$

در اینصورت بسهولت می توان نشان داد که f یك همریختی یك بیك از $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ به $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ است • پس $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ را می توان در $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ محاط کــرد •

(ب) تعریف می کنیم

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$$

در اینصورت بسهولت می توان نشان داد که f یك همریختی یك بیك از $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ به $(\mathbb{R}^3; +, \cdot)$ است • پس $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ را می توان در $(\mathbb{R}^3; +, \cdot)$ محاط کــرد •

(ج) هیچ یک‌را نمی‌توان در دیگری محاط کرد •

(د) چون $(D_3 ; o) \cong (S_3 ; o)$ پس می‌توان هریک را در دیگری محاط کرد •

(هـ) هیچ یک را نمی‌توان در دیگری محاط کرد •

۶-۳-۱۰

فرض کنیم $f: A \to B$ یک همریختی یک بیک از $(A; *_1, \ldots, *_n)$ به $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ و $g: B \to C$ یک همریختی یک بیک از $(B; *'_1, \ldots, *'_n)$ به $(C; *''_1, \ldots, *''_n)$ باشد • در اینصورت $g \circ f: A \to C$ یک همریختی یک بیک از $(A; *_1, \ldots, *_n)$ به $(C; *''_1, \ldots, *''_n)$ است • زیرا که اولاً چون f و g یک بیک اند پس $g \circ f$ یک بیک است و بعلاوه برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ داریم:

$$(g \circ f)(x *_i y) = g(f(x *_i y)) = g(f(x) *'_i f(y))$$
$$= g(f(x)) *''_i g(f(y)) = (g \circ f)(x) *''_i (g \circ f)(y)$$

بنابراین $(A; *_1, \ldots, *_n)$ در $(C; *''_1, \ldots, *''_n)$ محاط می‌شود •

۶-۳-۱۱

(الف) خیر زیرا که $۲ . ۲ = ۰$ درحالیکه $۲ \neq ۰$.

(ب) خیر زیراکه $(۰,۱)(۱,۰) = (۰,۰)$ در حالیکه $(۱,۰) \neq (۰,۰)$ و $(۰,۱) \neq (۰,۰)$.

(ج) فرض‌کنیم $(F; +, \cdot)$ یک هیات‌باشد و $x, y \in F$ بطوریکه $xy = ۰$. اگر $x \neq ۰$ پس $x^{-1} \in F$ وجود دارد و در نتیجه $x^{-1}(xy) = ۰$. پس $(x^{-1}x)y = ۰$ و در نتیجه $y = ۰$ $۱ \cdot y =$ • پس اگر $xy = ۰$ آنگاه $x = ۰$ یا $y = ۰$ •

بنابراین $(F; +, \cdot)$ یک دامنه صحیح است •

(د) فرض کنیم $f: R \to R'$ یک یکریختی از $(R; +, \cdot)$ به $(R'; +, \cdot)$ باشد • بسهولت می‌توان دید که چون $(R; +, \cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی

است پس $(R';+,\cdot)$ یک حلقه یکانی و جابجایی است . فرض کنیم $a', b' \in R'$ و
$a'b' = 0$. چون f پوشاست پس $a, b \in R$ وجود دارند بطوریکه $a' = f(a)$ و
$b' = f(b)$. در اینصورت داریم :

$$a'b' = 0 \Longrightarrow f(a)f(b) = 0 \Longrightarrow f(ab) = 0 \Longrightarrow f(ab) = f(0)$$

چون f یک بیک است پس $ab = 0$ وچون $(R;+,\cdot)$ یک دامنه صحیح است
پس $a = 0$ یا $b = 0$ و در نتیجه $a' = f(a) = 0$ یا $b' = f(b) = 0$. بنابراین
$(R';+,\cdot)$ یک دامنه صحیح است .

۶-۳-۱۵

الف) $g(X \cup Y) = f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y] = g(X) \cup g(Y)$

پس g یک همریختی است . بعلاوه داریم :

$$X \subseteq Y \Longrightarrow f[X] \subseteq f[Y] \Longrightarrow g(X) \subseteq g(Y)$$

(ب) نشان می دهیم که g یک یکریختی است اگر و فقط اگر f دوسویی باشد . فرض
کنیم g یک یکریختی است . در اینصورت g یک تابع دوسویی می باشد . پس داریم :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \{f(x)\} = \{f(x')\} \Rightarrow f[\{x\}] = f[\{x'\}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(\{x\}) = g(\{x'\}) \Rightarrow \{x\} = \{x'\} \Rightarrow x = x'$$

پس f یک بیک است . همچنین داریم :

$$y \in B \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow \exists X\,(X \in \mathcal{P}(A) \wedge g(X) = \{y\})$$

$$\Longrightarrow \exists X\,(X \in \mathcal{P}(A) \wedge f[X] = \{y\})$$

چون $g(\phi) = f[\phi] = \phi$ و g یک بیک است و $\{y\} \neq \phi$ پس $X \neq \phi$

و در نتیجه $x \in X$ وجود دارد ٠ حال $f(x) \in f[X]$ و در نتیجه $f(x)=y$.
پس f پوشاست ٠ بنابراین f دوسویی می‌باشد ٠
برعکس فرض کنیم f دوسویی باشد ٠ در اینصورت داریم:

$$g(X) = g(X') \Rightarrow f[X] = f[X'] \Rightarrow X = X'$$

پس g یك بیك است ٠ فرض کنیم $Y \in P(B)$٠ در اینصورت $Y \subseteq B$ و در نتیجه $X = f^{-1}[Y] \subseteq A$٠ در اینصورت چون f دوسویی است پس داریم:

$$f[X] = f[f^{-1}[Y]] = Y$$

پس g پوشاست ٠ بنابراین g دوسویی و در نتیجه یك یکریختی است٠

حل مسائل فصل ۷

۷-۱-٤

(الف) $m+1=n+1 \Longrightarrow s(m)=s(n) \xrightarrow{\text{s یک بیک}} m=n$

(ب) فرض کنیم:
$$S=\{n \mid n\in \mathbb{N} \wedge n\neq s(n)\}$$
چون $s(1)\neq 1$ پس $1\in S$. فرض کنیم $n\in S$. در اینصورت $s(n)\neq n$.
اگر $n+1=s(n+1)$، آنگاه $s(n)=s(n+1)$ و در نتیجه
$n=n+1=s(n)$ که یک تناقض است. پس $s(n+1)\neq n+1$.
و در نتیجه $n+1\in S$. پس $S=\mathbb{N}$ و در نتیجه $s(n)\neq n$ برای هر
$n\in \mathbb{N}$.

(ج) فرض کنیم:
$$S=\{m \mid m\in \mathbb{N} \wedge m+n\neq m\}$$
چون $1+n=n+1=s(n)\neq 1$ پس $1\in S$. فرض کنیم $m\in S$. در
اینصورت $m+n\neq m$. اگر $m+1+n=m+1$ آنگاه
$s(m+n)=m+n+1=m+1=s(m)$ و در نتیجه $m+n=m$ که یک
تناقض است. پس $m+1+n\neq m+1$ و در نتیجه $m+1\in S$. پس
$S=N$ و در نتیجه برای هر $m,n\in N$ داریم $m+n\neq m$.

(د) فرض کنیم $n=mn$ و $m\neq 1$. در اینصورت $K\in N$ وجود
دارد بطوریکه $m=k+1$. پس داریم:
$$n=mn=(k+1)n=kn+n$$
که یک تناقض به بند (ج) است. پس $m=1$. بنابراین برای هر $m,n\in N$
داریم:
$$n=mn\Longrightarrow m=1.$$

۷-۱-۷

(الف) فرض کنیم r_1 و r_2 در $\mathbb{N}$ باشند بطوریکه $n=m+r_1$ و $n=m+r_2$. نشان می‌دهیم که $r_1=r_2$. چون $m+r_1=m+r_2$ پس بنابه ۷-۱-۵ (الف) ، $r_1=r_2$. بنابراین r در تساوی $n=m+r$ بطور یکتا تعیین می‌شود .

(ب) چون $s(n)=n+1$ پس $n<s(n)$. در اینجا توجه کنید که $r=1$.

۷-۱-۸

فرض کنیم $m<n$. در اینصورت $r\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n=m+r$. اگر $r=1$ ، آنگاه $n=m+1=s(m)$. اگر $r\neq 1$ آنگاه $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $r=s(k)$ ، و درنتیجه داریم:

$$n=m+s(k)=m+k+1=m+1+k=s(m)+k$$

پس $s(m)<n$. بنابراین $s(m)\leqslant n$.

برعکس فرض کنیم $s(m)\leqslant n$. در اینصورت $s(m)=n$ یا $s(m)<n$. اگر $s(m)=n$ آنگاه $m+1=n$ و درنتیجه $m<n$. اگر $s(m)<n$ آنگاه $r\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n=s(m)+r=m+1+r$ و در نتیجه $m<n$. پس در هر حالت $m<n$.

۷-۱-۱۱

(الف) اگر $m=n$ و $p=q$ آنگاه روشن است‌که $m+p=n+q$. حال فرض کنیم $m<n$ و $p\leqslant q$. در اینصورت ($m<n$ و $p=q$) یا ($m<n$ و $p<q$) . چون $m<n$ پس $r\in\mathbb{N}$ وجود داردبطوریکه $n=m+r$. اگر $p=q$ ، آنگاه $n+q=m+r+p=m+p+r$ و در نتیجه $m+p<n+q$. اگر $p<q$ آنگاه $t\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $q=p+t$ و درنتیجه داریم :

$$n+q=m+r+p+t=m+p+r+t$$

پس $m+p<n+q$ ، پس در هر حالت $m+p<n+q$ ، بطریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر $m\leqslant n$ و $p<q$ آنگاه $m+p<n+q$ ، بنابراین برای هر m ، n ، p و q در $\mathbb{N}$ داریم :

$$m\leqslant n\wedge p\leqslant q\Longrightarrow m+p\leqslant n+q$$

(ب) اگر $m=n$ و $p=q$ آنگاه روشن است که $mp=nq$ ، فرض کنیم که $m<n$ و $p\leqslant q$ ، در اینصورت $(p=q, m<n)$ یا $(p<q$ و $m<n)$.

چون $m<n$ پس $r\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n=m+r$ ، اگر $p=q$ آنگاه $nq=(m+r)p=mp+rq$ و در نتیجه $mp<nq$ ، اگر $p<q$ آنگاه $t\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $q=p+t$ و در نتیجه داریم :

$$nq=(m+r)(p+t)=mp+mt+rp+rt$$

پس $mp<nq$ ، پس در هر حالت $mp<nq$ ، بطریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر $m\leqslant n$ و $p<q$ آنگاه $mp<nq$ ، بنابراین برای هر m ، n ، p و q در $\mathbb{N}$ داریم :

$$m\leqslant n\wedge p\leqslant q\Longrightarrow mp\leqslant nq$$

(ج) فرض کنیم $m+p<n+p$ و $m\nless n$ ، چون $m\nless n$ پس بنا به ۹-۱-۷ ، $n\leqslant m$ ، در اینصورت بنا به بند (الف) ، $n+p\leqslant m+p$ که یک تناقض است ، پس $m<n$.

(د) فرض کنیم $mp<np$ و $m\nless n$ ، چون $m\nless n$ پس بنا به ۹-۱-۷ ، $n\leqslant m$ ، در اینصورت بنا به بند (ب) ، $np\leqslant mp$ که یک تناقض است ، پس $m<n$.

<u>۷-۱-۱۴</u>

(الف) نشان می‌دهیم $S=\mathbb{N}$. داریم :

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1')=1 \Longrightarrow 1\in S$$

فرض کنیم $n\in S$ • در اینصورت $(g\circ f)(n)=n$ داریم :

$$(g\circ f)(s(n))=g(f(s(n)))=g(s'(f(n)))=s(g(f(n)))$$
$$=s((g\circ f)(n))=s(n)$$

پس $s(n)\in S$ و در نتیجه $S=\mathbb{N}$ • بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $S'=\mathbb{N}'$ • بنابراین g معکوس f است •

(ب) فرض کنیم n یک عنصر دلخواه $\mathbb{N}$ باشد • اگر $n<1$ آنگاه $2\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $n+2=1$ • اگر $2=1$ آنگاه $s(n)=n+1=1$ که یک تناقض است • اگر $2\neq 1$ آنگاه $2=s(k)$ برای یک $k\in\mathbb{N}$ و در نتیجه $1=n+s(k)=s(n+k)$ که دوباره یک تناقض است • پس $n\not<1$ • در اینصورت بنا به ۷-۱-۹ ، $1\leqslant n$ و در نتیجه 1 کوچکترین عنصر $\mathbb{N}$ تحت رابطه $\leqslant$ است •

۷-۱-۱۵

(الف) فرض کنیم :

$$S=\{p\mid p\in\mathbb{N}\wedge(m^{n+p}=m^n m^p)\}$$

چون $m^{n+1}=m^n m=m^n m^1$ پس $1\in S$ • فرض کنیم $p\in S$ • در اینصورت $m^{n+p}=m^n m^p$ • پس داریم :

$$m^{n+p+1}=m^{n+p}m=m^n m^p m=m^n m^{p+1}$$

پس $p+1\in S$ • بنابراین $S=\mathbb{N}$ و در نتیجه برای هر m ، n و p در $\mathbb{N}$ داریم :

$$m^{n+p}=m^n m^p$$

ب) فرض کنیم :

$$S=\{p \mid p\in\mathbb{N}\wedge(m^{np}=(m^n)^p)\}$$

چون $m^{n1}=m^n=(m^n)^1$ پس $1\in S$ ، فرض کنیم $p\in S$ ، در

اینصورت $m^{np}=(m^n)^p$ ، پس با استفاده از بند (الف) داریم :

$$m^{n(p+1)}=m^{np+n}=m^{np}m^n=(m^n)^p(m^n)^1=(m^n)^{p+1}$$

پس $p+1\in S$ ، بنابراین $S=\mathbb{N}$ و در نتیجه برای هر m و n و p در $\mathbb{N}$ داریم :

$$m^{np}=(m^n)^p$$

ج) فرض کنیم :

$$S=\{p \mid p\in\mathbb{N}\wedge((mn)^p=m^pn^p)\}$$

چون $(mn)^1=mn=m^1n^1$ پس $1\in S$ ، فرض کنیم $p\in S$ ، در

اینصورت $(mn)^p=m^pn^p$ ، پس داریم :

$$(mn)^{p+1}=(mn)^p(mn)=(m^pn^p)(mn)=(m^pm)(n^pn)=m^{p+1}n^{p+1}$$

پس $p+1\in S$ ، بنابراین $S=\mathbb{N}$ و در نتیجه برای هر m ، n و p

در $\mathbb{N}$ داریم :

$$(mn)^p=m^pn^p$$

۶-۲-۷

(الف)

$$[(m,n)]=[(0,0)]\Longleftrightarrow(m,n)\sim(0,0)\Longleftrightarrow m+0=0+n\Longleftrightarrow m=n$$

(ب)

$$[(m,n)]=[(1,0)] \Longleftrightarrow (m,n)\sim(1,0) \Longleftrightarrow m+0=1+n \Longleftrightarrow m=n+1$$

۷-۲-۱۰

(الف) نشان می‌دهیم که $\mathbb{Z}^+$ نسبت به جمع بسته است •

بنابه ۷-۲-۷: $[(m,n)],[(p,q)]\in\mathbb{Z}^+ \Longrightarrow m>n \wedge p>q$

بنا به ۷-۱-۱۱ (الف): $\Longrightarrow m+p>n+q$

بنا به ۷-۲-۷: $\Longrightarrow [(m+p,n+q)]\in\mathbb{Z}^+$

بنا به تعریف جمع: $\Longrightarrow [(m,n)]+[(p,q)]\in\mathbb{Z}^+$

حال نشان می‌دهیم که $\mathbb{Z}^+$ نسبت به ضرب بسته است •

$$[(m,n)],[(p,q)]\in\mathbb{Z}^+ \Longrightarrow m>n \wedge p>q$$

چون $m>n$ پس $r\in\mathbb{N}$ وجود داردبطوریکه $m=n+r$ • در اینصورت با ضرب این تساوی در p و سپس در q خواهیم داشت $mp=np+rp$ و $mq=nq+rq$ • پس داریم $mp+nq+rq=mq+np+rp$ حال چون $p>q$ پس $rp>rq$ و در نتیجه $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $rp=rq+k$ • پس داریم:

$$mp+nq+rq=mq+np+k+rq \Longrightarrow mp+nq=mq+np+k$$

پس $mp+nq>mq+np$ و در نتیجه $[(mp+nq,mq+np)]\in\mathbb{Z}^+$ •

بنابراین $[(m,n)][(p,q)]\in\mathbb{Z}^+$ •

(ب) اگر $[(m,n)]\in\mathbb{Z}$ • آنگاه $m,n\in\mathbb{N}_0$ و در نتیجه دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است:

$$m=n \vee m>n \vee n>m$$

اگر $n = m$ آنگاه $[(m,n)] = [(0,0)]$ • اگر $m > n$ آنگاه $[(m,n)] \in \mathbb{Z}^+$ •
اگر $n > m$ آنگاه $[(n,m)] \in \mathbb{Z}^+$ • بنابراین دقیقاً یکی از حالات زیر برقرار است:

$$[(m,n)] = [(0,0)] \vee [(m,n)] \in \mathbb{Z}^+ \vee -[(m,n)] = [(n,m)] \in \mathbb{Z}^+$$

۷-۲-۱۵

(الف) اگر $a = 0$ یا $b = 0$ آنگاه روشن است که $ab = 0$ • فرض کنیم $a \neq 0$ و $b \neq 0$ • در اینصورت ($a \in \mathbb{Z}^+$ یا $-a \in \mathbb{Z}^+$) و ($b \in \mathbb{Z}^+$ یا $-b \in \mathbb{Z}^+$) •
اگر $a \in \mathbb{Z}^+$ و $b \in \mathbb{Z}^+$ آنگاه $ab \in \mathbb{Z}^+$ و در نتیجه $ab \neq 0$ •
اگر $a \in \mathbb{Z}^+$ و $-b \in \mathbb{Z}^+$ آنگاه $-(ab) = a(-b) \in \mathbb{Z}^+$ و در نتیجه $-(ab) \neq 0$ •
پس $ab \neq 0$ • بطریق مشابه اگر $-a \in \mathbb{Z}^+$ و $b \in \mathbb{Z}^+$ آنگاه $ab \neq 0$ •
پس در هرحالت $ab \neq 0$ • بنابراین اگر $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ •

(ب)

$$a + c = b + c \Longrightarrow a + c + (-c) = b + c + (-c)$$
$$\Longrightarrow a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$$
$$\Longrightarrow a + 0 = b + 0$$
$$\Longrightarrow a = b$$

(ج)

$$ac = bc \Longrightarrow ac + (-(bc)) = bc + (-bc) = 0$$
$$\Longrightarrow ac + (-b)c = 0 \Longrightarrow (a + (-b))c = 0$$

چون $c \neq 0$ پس بنابه بند (الف) ، $a + (-b) = 0$ و در نتیجه $a = b$ •

(د) نتیجه ای از ۳-۵۲-۶ (و) است •

(هـ) نتیجه ای از ۳ ۵-۲-۶ (و) است ٠

۶-۳-۷

(الف)

$$[(a,b)]=[(0,1)] \Longleftrightarrow (a,b)\sim(0,1) \Longleftrightarrow a1=b0 \Longleftrightarrow a=0$$

(ب)

$$[(a,b)]=[(1,1)] \Longleftrightarrow (a,b)\sim(1,1) \Longleftrightarrow a1=b1 \Longleftrightarrow a=b$$

چون $[(a,b)]\in \mathbb{Q}$ پس $b\neq 0$ و در نتیجه $a\neq 0$ ٠

(ج)

$$[(a,b)]+[(-a,b)]=[(ab+b(-a),b^2)]=[(ab-ab,b^2)]$$

$$=[(0,b^2)]=[(0,0)]$$

پس $[(-a,b)]=-[(a,b)]$ ٠ بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $[(a,-b)]=-[(a,b)]$ ٠

(د) با استفاده از بند (ج) داریم :

$$[(-a,-b)]=-[(a,-b)]=-\left(-[(a,b)]\right)=[(a,b)]$$

(هـ) چون $[(a,b)]\in \mathbb{Q}$ پس $a,b\in \mathbb{Z}$ و $b\neq 0$. چون $b\neq 0$ پس $b\in \mathbb{Z}^+$ یا $-b\in \mathbb{Z}^+$ ٠ اگر $b\in \mathbb{Z}^+$ آنگاه باقراردادن $c=a$ و $d=b$ مساله حل می‌شود ٠ اگر $-b\in \mathbb{Z}^+$ آنگاه چون $[(a,b)]=[(-a,-b)]$ پس با قرار دادن $c=-a$ و $d=-b$ مساله حل می‌شود ٠

۷-۳-۱٤

(الف) این بند مانند بند (ب) تمرین ۱۵-۲-۷ اثبات می‌شود ·

(ب) چون $z \neq 0$ پس z^{-1} در Q وجود دارد · پس داریم :

$$xz = yz \Rightarrow (xz)z^{-1} = (yz)z^{-1} \Rightarrow x(zz^{-1}) = y(zz^{-1}) \Rightarrow x1 = y1 \Rightarrow x = y$$

(ج) نتیجه‌ای از ۵۳-۲-٦ (و) است ·

(هـ) نتیجه‌ای از ۵۳-۲-٦ (و) است ·

۷-۳-۱۵

(الف) با استفاده از ۱٤-۳-۷ (ج) و انتقالی بودن $<$ داریم :

$$\left.\begin{array}{l} x < x' \Longrightarrow x + y < x' + y \\ y < y' \Longrightarrow x' + y < x' + y' \end{array}\right\} \Longrightarrow x + y < x' + y'$$

(ب) اگر $x = 0$ یا $y = 0$ آنگاه $xy = 0$ و چون $x' > 0$ و $y' > 0$ پس $x'y' > 0$ و در نتیجه $0 = xy < x'y'$ · فرض کنیم $x > 0$ و $y > 0$ · در اینصورت با استفاده از ۱٤-۳-۷ (هـ) و انتقالی بودن $<$ داریم :

$$\left.\begin{array}{l} x < x' \wedge y > 0 \Longrightarrow xy < x'y \\ y < y' \wedge x' > 0 \Longrightarrow x'y < x'y' \end{array}\right\} \Longrightarrow xy < x'y'$$

پس داریم :

$$0 \leqslant x < x' \wedge 0 \leqslant y < y' \Longrightarrow 0 \leqslant xy < x'y'$$

۷-۳-۱٦

فرض کنیم $x < z$ · قرار می‌دهیم $y = \frac{x+z}{2}$ و نشان می‌دهیم که $x < y < z$ ·

$$x < z \Longrightarrow x + x < x + z \Longrightarrow ۲x < x + z \Longrightarrow x < \frac{x+z}{۲} \Longrightarrow x < y$$

$$x < z \Longrightarrow x + z < z + z \Longrightarrow x + z < ۲z \Longrightarrow \frac{x+z}{۲} < z \Longrightarrow y < z$$

پس $x < y < z$.

۷-٤-۲۱

فرض کنیم $u \in \mathbb{R}^+$. در اینصورت $u > 0$. اگر $x \leqslant 0$ برای هر $x \in u$ آنگاه u دارای بزرگترین عنصر یعنی 0 است که یک تناقض می‌باشد . اگر $x < 0$ برای هر $x \in u$ آنگاه $u \subseteq 0$ و در نتیجه $u \leqslant 0$ که یک تناقض است . پس $x \in u$ وجود دارد بطوریکه $x > 0$. برعکس فرض کنیم که $x \in u$ وجـــود دارد بطوریکه $x > 0$. در اینصورت اگر $y \in 0$ آنگاه $y < 0$ و در نتیجـــه $y < x$. پس $y \in u$ و در نتیجه $0 \subseteq u$. همچنین $x \in u$ ولی $x \notin 0$ و در نتیجه $0 \subset u$. پس $u > 0$. بنابراین $u \in \mathbb{R}^+$.

۷-٤-۲٤

فرض کنیم $u \neq 0$. در اینصورت $u > 0$ یا $u < 0$. اگر $u > 0$ ، آنـــگاه $|u| = u \in \mathbb{R}^+$. اگر $u < 0$ آنگاه $-u > 0$ و چون $|u| = -u$ پس $|u| \in \mathbb{R}^+$.
بنابراین داریم :

$$u \in \mathbb{R} \Longrightarrow u = 0 \vee |u| \in \mathbb{R}^+$$

۷-٤-۲٦

$$u > 0 \Longleftrightarrow u \neq 0 \wedge u \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow u \neq 0 \wedge -u \notin \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow -u < 0$$

۷-٤-۳۷

(الف) فرض کنیم $u > 0$. اگر $u^{-1} \leqslant 0$ آنگاه $uu^{-1} \leqslant 0$ و در نتیجه $1 \leqslant 0$ کـــه یک تناقض است . پس $u^{-1} > 0$. بطریق مشابه اگر $u^{-1} > 0$ آنگاه $u > 0$. پس $u > 0$ اگر و فقط اگر $u^{-1} > 0$.

(ب) اثبات این بند مانند اثبات بند (ب) تمرین ۱۵-۲-۷ است .

(ج) اثبات این بند مانند اثبات بند (ب) تمرین ۱٤-۳-۷ است .

(د) اثبات این بند نتیجه ای از اثبات بند (و) تمرین ۵۳-۲-٦ است .